Иванов А.Б.

Алгоритмы и структуры данных

NP-полные задачи

Клика, вершинное покрытие, независимое множество

Связный неориентированный граф

Клика (CLIQUE): Существует ли подмножество вершин размера k, образующих полный граф?

Вершинное покрытие (VC): Существует ли подмножество вершин размера k такое, что один из концов любого ребра находится в этом подмножестве?

Независимое подмножество (IS): Существует ли подмножество вершин размера k такое, что никакие две вершины не соединены ребром?

Клика, вершинное покрытие, независимое множество

Утверждение: Следующие утверждения эквивалентны для графа $G = (V, E)$ и $V' \subseteq V$, $|V| = k$:

1. V' - клика размера k в дополнении G'
2. V' - независимое множество размера k в G
3. $V \setminus V'$ - вершинное покрытие размера $|V| - k$ в G

$1 \Rightarrow 2$ Если V' - клика, то $\forall u, v \in V'$, $(u, v) \notin E$

$2 \Rightarrow 3$ $\forall u, v \in V'$, $(u, v) \notin E$, откуда следует, что один из концов любого ребра находится в $V \setminus V'$.

$3 \Rightarrow 1$ Если $V \setminus V'$ - вершинное покрытие, то $\forall u, v \in V'$, $(u, v) \notin G$, откуда следует, что в G' есть ребро (u,v)

3SAT → Независмое множество

Пример:

$$(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee x)$$

k - количество дизъюнктов

Способы доказательства NP-Полноты

- ограничение (УНЕ $\longrightarrow$ ЦЛП)
- локальная замена (SAT $\longrightarrow$ 3-SAT)
- конструирование (3-SAT $\longrightarrow$ 3DM)

Гамильтонов путь

Дано: неориентированный граф G
Требуется:
Существует ли в G гамильтонов путь (простой путь, включающий все вершины) из вершины s в вершину t?

Утверждение: Задача о гамильтоновом пути - NP-полная.

Сведем задачу о гамильтоновом цикле к задаче о гамильтоновом пути.

Задача о самом длинном пути

Дано:

- неориентированный граф G
- "бюджет"L

Требуется:
Существует ли в G простой путь длинной $\geq L$?

Утверждение: Задача о самом длинном пути - NP-полная.

Сведем задачу о гамильтоновом пути к задаче о самом длинном пути (длиной $|V| - 1$).

Задача разбиения множества чисел

Дано:

- множество $C = \{c_i \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, n\}$

Требуется:
Существует ли в $S \subset \{1, \ldots, n\}$ такое, что:

$$\sum_{i \in S} c_i = \sum_{i \notin S} c_i?$$

Утверждение: Задача разбиения множества чисел - NP-полная.

Сведем задачу о сумме подмножества к задаче разбиения множества чисел:

Задача разбиения множества чисел

Дано:

- множество $C = \{c_i \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, n\}$

Требуется:
Существует ли в $S \subset \{1, \ldots, n\}$ такое, что:

$$\sum_{i \in S} c_i = \sum_{i \notin S} c_i?$$

Утверждение: Задача разбиения множества чисел - NP-полная.

Сведем задачу о сумме подмножества к задаче разбиения множества чисел:

$$C = S \cup \{s - 2t\}$$

Задача об упаковке в контейнеры

Дано:

- множество $I = \{s_i \in (0, 1], i = 1, \dots, n\}$
- "бюджет"B

Требуется: Существует ли "упаковка"I в $\leq B$ контейнеров размера 1?

Утверждение: Задача об упаковке в контейнеры - NP-полная.

Сведем задачу разбиения множества чисел к задаче об упаковке в контейнеры:

Задача об упаковке в контейнеры

Дано:

- множество $I = \{s_i \in (0,1], i = 1, \ldots, n\}$
- "бюджет"B

Требуется: Существует ли "упаковка"I в $\leq B$ контейнеров размера 1?

Утверждение: Задача об упаковке в контейнеры - NP-полная.

Сведем задачу разбиения множества чисел к задаче об упаковке в контейнеры:

$$s_i = \frac{2c_i}{\sum c_i}$$

Задача о покрытии множествами

Дано:

- множество S, подмножества $S_i \subseteq S, i = 1, \ldots, n$
- "бюджет"B

Требуется: Существует ли набор индексов $|I| \leq B$ такой, что:

$$\bigcup_{i \in I} S_i = S$$

Утверждение: Задача о покрытии множествами - NP-полная.

Сведем задачу вершиноого покрытия к задаче о покрытии множествами:

Задача о покрытии множествами

Дано:

- множество S, подмножества $S_i \subseteq S, i = 1, \ldots, n$
- "бюджет"B

Требуется: Существует ли набор индексов $|I| \leq B$ такой, что:

$$\bigcup_{i \in I} S_i = S$$

Утверждение: Задача о покрытии множествами - NP-полная.

Сведем задачу вершиноого покрытия к задаче о покрытии множествами:
Для графа $G = (V, E)$ возьмем $S = E$, S_u - ребра, инцидентные u.

Задача k-центра

Дано:

- полный взвешенный граф $G = (V, E)$
- $k \in \mathbb{N}$
- "бюджет" B

Требуется: Существует ли $C \subseteq V, \quad |C| = k$ такое, что:

$$\max_{v \in V} d(v, C) \leq B$$

Утверждение: Задача k-центра - NP-полная.

Сведем задачу вершиноого покрытия к задаче k-центра.

Задача k-центра

Имея граф $G = (V, E)$ построим полный граф с вершинами $V \cup V'$, где $V' = \{v_e, e \in E\}$. Расстояния определим так:

- $d(u, v) = 1$, если $(u, v) \in E$
- если $e = (u, v) \in E$, то $d(u, v_e) = d(v, v_e) = 1$
- для всех остальных $d(u, v) = 2$

Утверждение: Граф (G, V) имеет вершинное покрыие размера $k \Leftrightarrow$ у задачи k-центра есть решение с бюджетом 1.