Адрианов Н.М.
Иванов А.Б.

Алгоритмы и структуры данных

Графы. DFS. Топологическая сортировка. Сильносвязанные компоненты.

Представление графа в программе

Матрица смежности

Списки смежности

Поиск в глубину (DFS = Depth First Search)

```
procedure DFS( G, s, t ):
  if s = t:
    return true
  visited = array of size G.V
  return DFS( G, s, t, visited )
end

procedure DFS( G, s, t, visited ):
  visited[s] = true
  for x in G.neighbours(s):
    if x = t:
      return true
    if not visited[x]:
      if DFS(G, x, t, visited):
        return true
  end
  return false
end
```

DFS без рекурсии

Заменить в алгоритме BFS очередь на стек!

Полный обход всего графа (DFS)

Утв. После вызова `DFS(G, x)` для всех вершин `y`, достижимых из `x`, `visited[y] = true`

```
procedure DFS( G ):
  visited = array bool[G.V]
  for x in G.vertices:
    if not visited[x]:
      DFS(G, x)
  end
end

procedure DFS( G, x ):
  visited[x] = true
  Previsit(x)
  for y in G.neighbours(x):
    if not visited[y]:
      DFS(G, y)
  end
  Postvisit(x)
end
```

Компоненты связности неориент.графа

```
procedure Previsit( x ):
  ccnum[x] = cc
end
```

```
procedure DFS( G ):
  cc = 0
  ccnum = array int[G.V]
  visited = array bool[G.V]
  for x in G.vertices:
    if not visited[x]:
      DFS(G, x)
      cc = cc + 1
  end
end

procedure DFS( G, x ):
  visited[x] = true
  Previsit(x)
  for y in G.neighbours(x):
    if not visited[y]:
      DFS(G, y)
  end
  Postvisit(x)
end
```

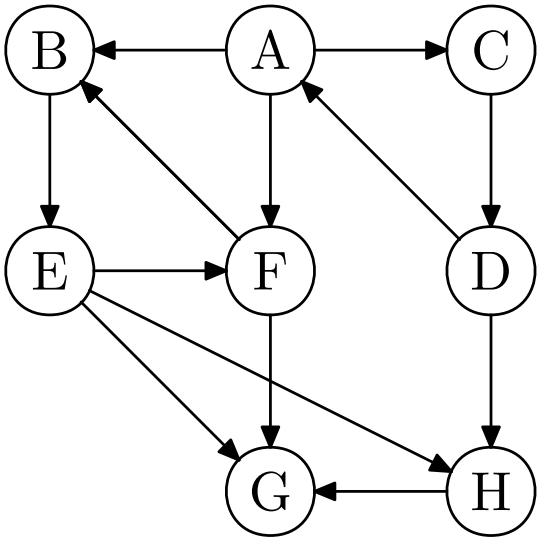
DFS в ориентированных графах

```
procedure Previsit( x ):
  pre[x] = clock
  clock = clock + 1
end

procedure Postvisit( x ):
  post[x] = clock
  clock = clock + 1
end
```

```
procedure DFS( G ):
  pre = array int[G.V]
  post = array int[G.V]
  clock = 1
  ...
end
```

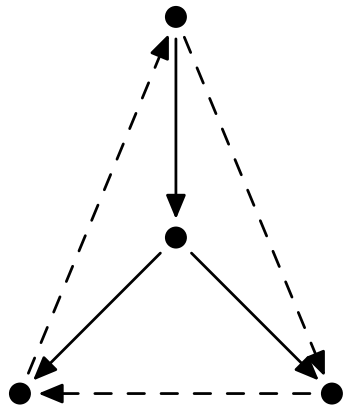
DFS в ориентированных графах




```
A: B,C,F        E: F,G,H
B: E            F: B,G
C: D            G: -
D: A,H          H: G
```

Типы ребер

древесное/прямое	`[`	`[`	`]`	`]`
	`u`	`v`	`v`	`u`
обратное	`[`	`[`	`]`	`]`
	`v`	`u`	`u`	`v`
перекрестное	`[`	`]`	`[`	`]`
	`v`	`v`	`u`	`u`



Утв 1. Для любых вершин `u` и `v` отрезки `[pre(u), post(u)]` и `[pre(v), post(v)]` либо вложены, либо не пересекаются.

Утв 2. Ориентированный граф содержит цикл $\Leftrightarrow$ существует обратное ребро.

Утв 3. Для любого ребра `(u,v)` в ориентированном ациклическом графе (DAG) `post(u) > post(v)`.

Топологическая сортировка

Дано: Ориентированный ациклический граф $G = (V, E)$.

Надо: Пронумеровать вершины V графа так, чтобы для любого ребра $(u, v) \in E$ номер вершины v был больше номера вершины u.

(Другими словами: расположить вершины на временной оси так, чтобы все ребра были направлены "в будущее".)

Решение: Выводим вершины в обратном post-порядке.

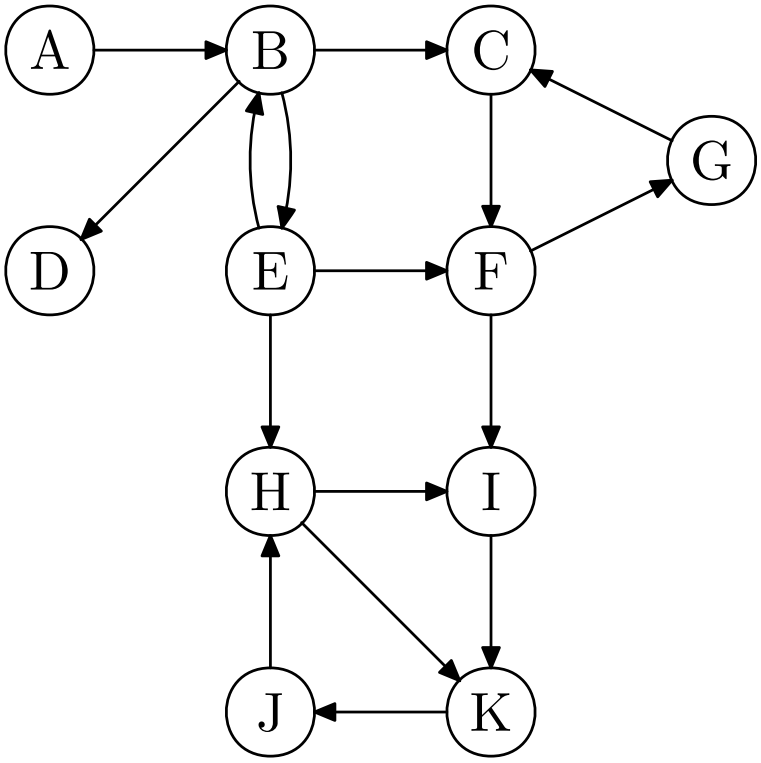
Истоки и стоки в DAG

Вершина называется *истоком*, если не существует входящих в нее ребер.

Вершина называется *стоком*, если не существует исходящих из нее ребер.

Утв. В ориентированном ациклическом графе (DAG) существует хотя бы один исток и хотя бы один сток.

Компоненты сильной связности



Компоненты сильной связности

Утв 1. Пусть `v` лежит в компоненте-стоке. Тогда `DFS(G, v)` обойдет все вершины в компоненте и только их.

Компоненты сильной связности

Утв 2. Пусть C и C' – компоненты сильной связности, и существует ребро из C в C'. Тогда

$$\max_{c \in C} \texttt{post}(c) > \max_{c' \in C'} \texttt{post}(c')$$

Следствие. Вершина с максимальным post-значением лежит в компоненте-истоке.

Алгоритм Косарайю

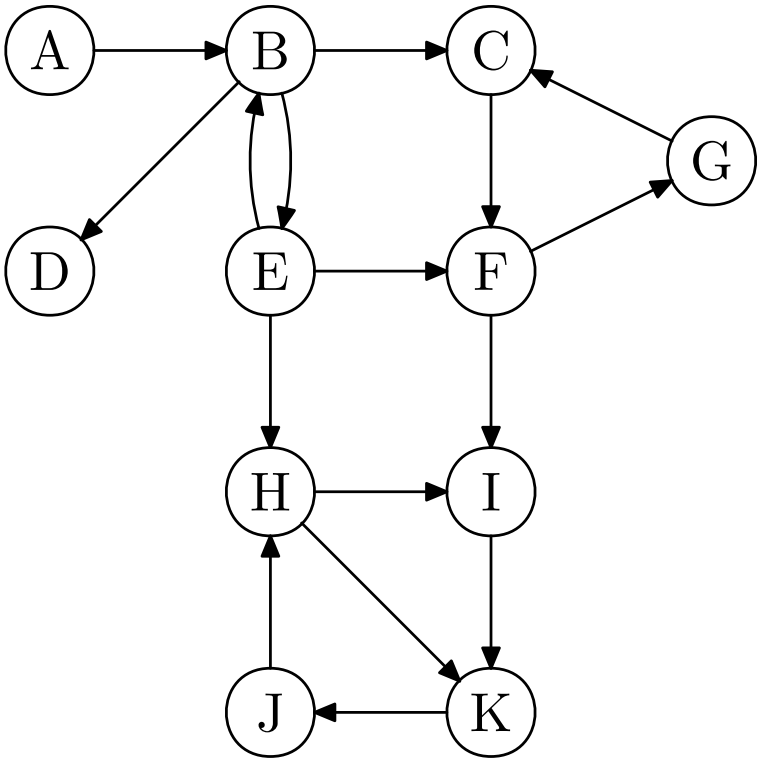
(S. Rao Kosaraju, Micha Sharir, 1979)

G^R – обращенный граф

1. Запустить DFS для G^R.
2. Запустить алгоритм нахождения компонент G (как в неориентированном случае) в обратном post-порядке.

Алгоритм Тарьяна

Robert Tarjan – алгоритм с однократным DFS, 1972



index, lowlink

2-выполнимость (2-SAT)

Дано: булева формула в КНФ такая, что в каждом терме только 2 литерала:

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = \bigwedge_{\alpha} (z_\alpha \vee w_\alpha), \qquad \text{где } z_\alpha, w_\alpha = x_i \text{ или } \bar{x}_i$$

Надо: Найти такой набор значений переменных, чтобы формула приняла значение “истина”.