Иванов А.Б.

Алгоритмы и структуры данных

Динамическое программирование

Задача о рюкзаке: динамика

Дано:

- Рюкзак максимальной вместимости W (по весу)
- n предметов, для которых задан вес w_i и ценность v_i

Найти набор предметов $S \subset \{1, 2, \dots n\}$ такой, что

$$\sum_{i \in S} w_i \le W \quad \text{и} \quad \sum_{i \in S} v_i \to max$$

Пусть W и все w_i – целые числа.

Подзадачи для динамики:

$$S \subset \{1, 2, \dots k\} \quad \text{и} \quad \sum_{i \in S} w_i \le x$$

Пусть $A[k, x]$ – оптимальное решение для такой задачи.

Тогда

$$A[k, x] = \max\Big(A[k-1, x],\ A[k-1, x-w_k] + v_k\Big)$$

Задача о рюкзаке: динамика

```
procedure KnapsackDynamic( v, w )

  A = 2-мерный массив
  for x = 0,1,2,...W
    A[0,x] = 0

  for i = 1,2,...n:
    for x = 0,1,2,...W:
      A[i,x] = max( A[i-1,x], A[i-1,x-w[i]] + v[i] )

  return A[n,W]
end
```

Сложность: $O(nW)$

Задача о рюкзаке: еще одна динамика

Пусть стоимости v_i – целые числа.

Подзадачи: для $i = 0, 1, 2 \dots n$ и $x = 0, 1, 2, \dots n \cdot v_{max}$
$A[i, x] =$ минимально нужный размер для того, чтобы достичь стоимости $\geq x$, используя только первые i предметов.

Рекурентное соотношение:

$$A[i, x] = \min\Big(A[i-1, x], w_i + A[i-1, x-v_i]\Big)$$

(считаем $A[i-1, x-v_i] = 0$, если $x \leq v_i$).

Задача о рюкзаке: еще одна динамика

```
procedure KnapsackDynamic2( W, v, w )
  A = 2-мерный массив
  A[0, x] = 0, если x = 0
          +∞, иначе

  for i = 1,2,...n
    for x = 0,1,... n*v_max
      A[i,x] = min ( A[i-1,x], w[i] + A[i-1, x - v[i]] )

  return максимальное x такое, что A[n,x] <= W.
```

Сложность: $O(n^2 v_{max})$

Задача коммивояжёра

Коммивояжёр находится в одном из n городов, хочет их все объехать кратчайшим путем.

Дано: полный неориентированный граф с неотрицательными длинами ребер d_{ij}.

Требуется: найти обход всех вершин по 1 разу (гамильтонов цикл) минимальной длины.

Полный перебор: $(n-1)!$

Задача коммивояжёра: динамика

Города: $\{1, 2, \ldots n\}$
Подзадачи: для каждого $S \subseteq \{1, 2, \ldots n\}$ и $j \in S$

$$A[S, j] = \text{кратчайший путь из 1 в } j, \text{ проходящий через все города в } S \text{ ровно по 1 разу}$$

$$A[S, j] = \min_{i \in S, i \neq j} (A[S \setminus \{j\}, i] + d_{ij})$$

Задача коммивояжёра: динамика

```
procedure TSP( p )
  A[{1}, 1] = 0
  for s = 2 .. n:
    for S ⊆ {1,2,...n}, 1 ∈ S, |S| = s:
      A[S, 1] = ∞
      for j ∈ S, j ≠ 1:
        A[S, j] = min (A[S \ {j}, i] + d[i,j])
                  (среди всех i ∈ S, i ≠ j)
  return min (A[{1,2,...n}, j] + d[j,1]
end
```

Сложность: $O(n^2 2^n)$

n	$n^2 2^n$	$(n-1)!$
5	800	24
10	102400	362880
15	7372800	87178291200
20	419430400	121645100408832000
25	20971520000	620448401733239439360000

Произведение матриц

Умножение матрицы $m \times n$ на матрицу $n \times p$ выполняется за $O(mnp)$. Предположим, что «стоимость» умножения равна mnp.

Даны матрицы $m_0 \times m_1$, $m_1 \times m_2$, ... $m_{n-1} \times m_n$, каким способом их надо перемножать, чтобы сделать это «дешевле»?

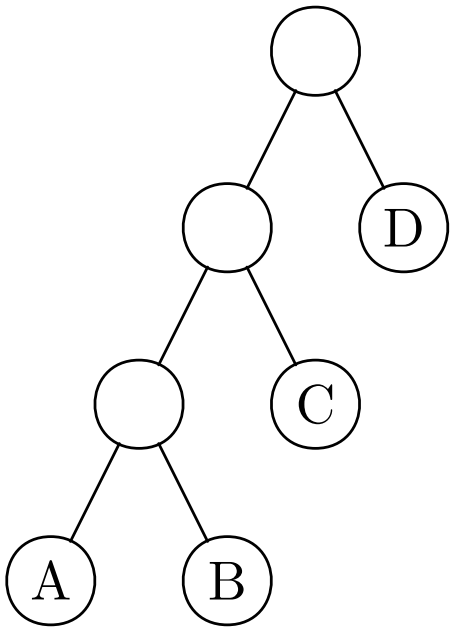
$A = (50 \times 20)$ $B = (20 \times 1)$ $C = (1 \times 10)$ $D = (10 \times 100)$

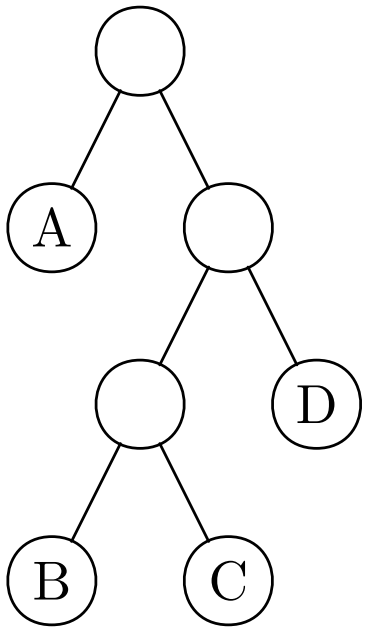
$A \times ((B \times C) \times D)$

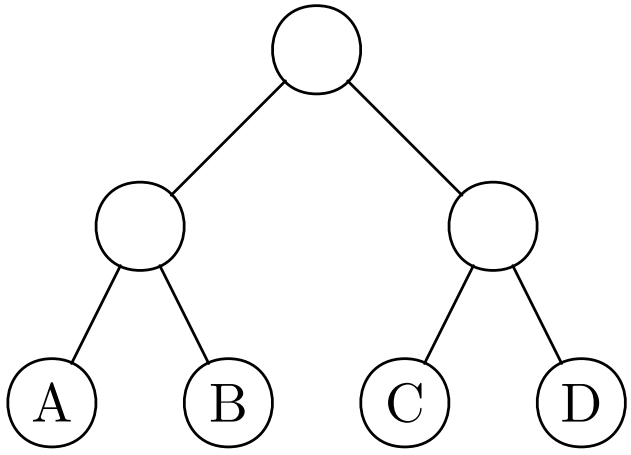
$(A \times (B \times C)) \times D$

$(A \times B) \times (C \times D)$

Произведение матриц







$C[i,\, j] =$ минимальнасть стоимость вычисления $A_i \times \ldots \times A_j$

$$C[i,\, j] = \min_{i \le k < j} \Big(C[i,\, k] + C[k+1,\, j] + m_{i-1} \cdot m_k \cdot m_j \Big)$$

Оптимальные бинарные деревья поиска

Сбалансированные бинарные деревья минимизируют время поиска случайного элемента в дереве, если все элементы в дереве ищутся равновероятно. Время поиска = глубина элемента в дереве.

Дано: веса (вероятности) p_i, $i = 1, 2 \dots n$.
Требуется: построить бинарное дерево поиска T, минимизирующее величину

$$C(T) = \sum_i p_i * [\text{глубина элемента } i \text{ в } T].$$

Похоже на код Хаффмана. Однако есть существенные отличия:

- код Хаффмана prefix-free, т.е. символы находятся только в листьях дерева
- в коде Хаффмана не требуется, чтобы дерево было деревом поиска (упорядоченность)

Оптимальные бинарные деревья поиска

Пусть
T – оптимальное дерево поиска, в вершине которого находится i,
T_1 – левое поддерево, T_2 – правое поддерево.

Тогда
T_1 – оптимальное дерево для $1, 2, \ldots (i-1)$,
T_2 - оптимальное дерево для $(i+1) \ldots n$.

Пусть C_{ij} – вес оптимального дерева для $\{i, i+1, \ldots j\}$. Тогда

$$C_{ij} = \min_{i \le r \le j} \left(\sum_{k=i}^{j} p_k + C_{i\,(r-1)} + C_{(r+1)\,j} \right)$$

(считаем $C_{xy} = 0$, если $x > y$).

Оптимальные бинарные деревья поиска

```
procedure OptimalBST( p )
  A = 2-мерный массив n*n
  for s = 0 .. n-1:
    for i = 1 .. n-s:
      A[i, i+s] = min (∑_{k=i}^{i+s} p_k + A[i, r-1] + A[r+1, i+s])
                  (среди всех r: i <= r <= i+s)
end
```

Сложность: $O(n^3)$