

АДРИАНОВ Н.М.
ИВАНОВ А.Б.

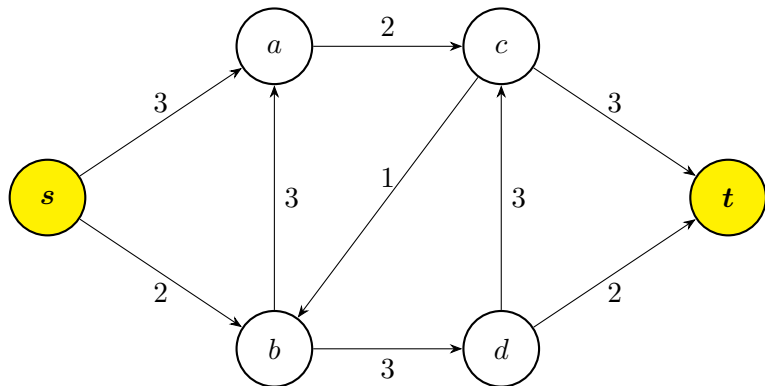
АЛГОРИТМЫ И СТРУКТУРЫ ДАННЫХ

ПОТОКИ В СЕТЯХ

ТРАНСПОРТНАЯ СЕТЬ

- ориентированный граф $G = (V, E)$
- заданы емкости $c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$
- $c(u, v) = 0$, если $(u, v) \notin E$
- вершина-исток s и вершина-сток t

ПРИМЕР ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ



ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ

Потоком называется функция $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что

- $f(u, v) \leq c(u, v)$ для всех $u, v \in V$
- $f(u, v) = -f(v, u)$
- для любой вершины $u \in V \setminus \{s, t\}$ выполнено

$$\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$$

$$\left(\implies \sum_{(\cdot, u) \in E} f(\cdot, u) = \sum_{(u, \cdot) \in E} f(u, \cdot) \right)$$

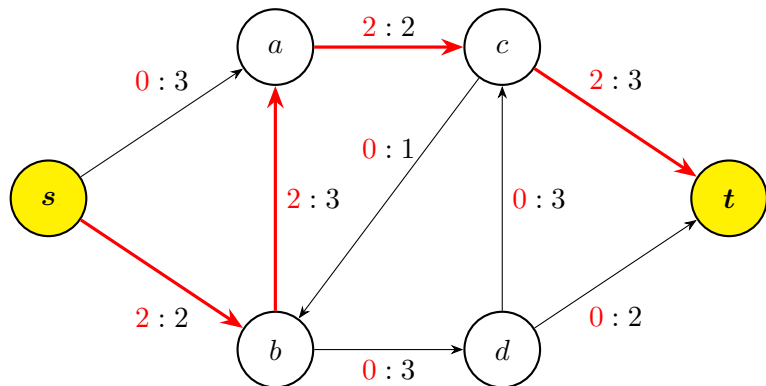
Величиной потока называется

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) = f(s, V)$$

СВОЙСТВА ПОТОКА

- $f(X, X) = 0$
- $f(X, Y) = -f(Y, X)$
- $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$, если $X \cap Y = \emptyset$
- $|f| = f(V, t) = \sum_{v \in V} f(v, t)$

ПРИМЕР ПОТОКА



$$|f| = 2$$

ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ

$$|f| = \max_{f'} |f'|$$

ОСТАТОЧНАЯ СЕТЬ

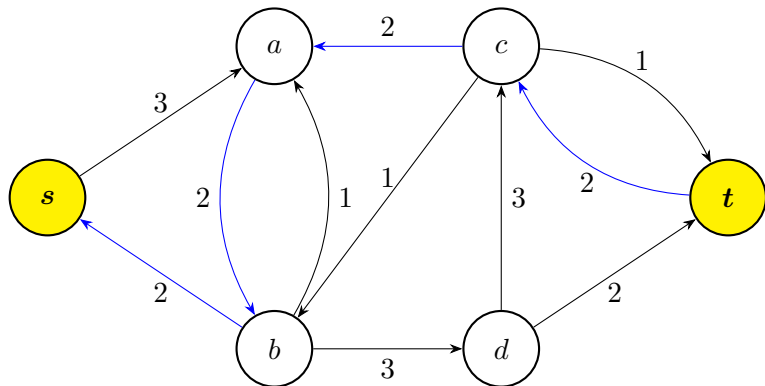
Добавим для каждого (направленного) ребра $(u, v) \in E$ обратное ребро (v, u) (если его еще не было) и зададим для него $c(v, u) = 0$.

Дана сеть $G = (V, E, c)$ и поток f .

Остаточная сеть $G_f = (V, E, c_f)$:

- для каждого ребра (u, v) зададим емкость $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$;
- добавим обратные ребра (v, u) с емкостью $f(u, v)$;
- удалим все ребра емкости 0.

ПРИМЕР ОСТАТОЧНОЙ СЕТИ



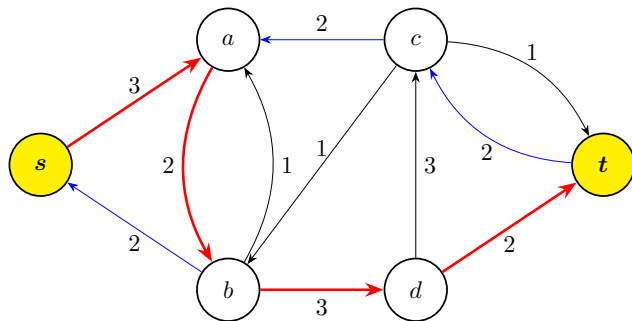
$$|f| = 2$$

УВЕЛИЧИВАЮЩИЙ ПУТЬ

Увеличивающий путь - любой путь в G_f из s в t .

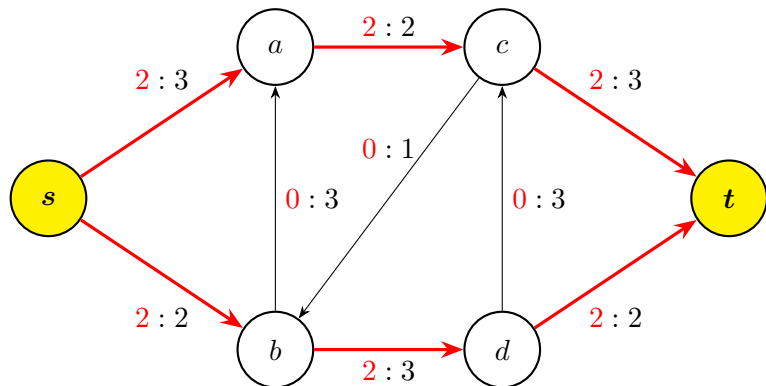
Мы можем увеличить поток вдоль пути p на

$$c_f(p) = \min_{(u,v) \in p} c_f(u,v)$$



$$c_f(p) = 2$$

НОВЫЙ ПОТОК



$$|f| = 4$$

АЛГОРИТМ ФОРДА-ФАЛКЕРСОНА

- Положим поток $f = 0$
- Пока в остаточной сети G_f есть путь p , возьмем минимальную емкость ребра вдоль p и увеличим поток на эту величину вдоль пути p .

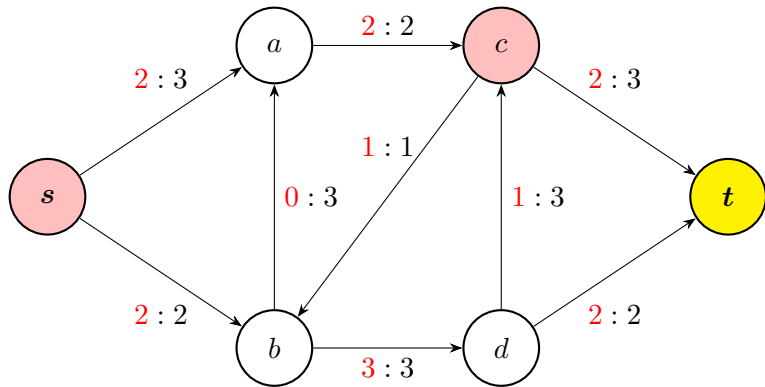
РАЗРЕЗ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

Разрез (S, T) : пара $S, T \subset V$, $S \cap T = \emptyset$ такая, что $s \in S, t \in T$

Поток через разрез (S, T) для потока f в G : $f(S, T)$

Пропускная способность (S, T) : $c(S, T) = \sum_{u \in S, v \in T} c(u, v)$

РАЗРЕЗ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ



РАЗРЕЗ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

Минимальный разрез: разрез, минимизирующий $c(S, T)$

Утв: Для любого потока f в G и любого разреза (S, T)
 $|f| = f(S, T)$.

Утв: Для любого потока f в G и любого разреза (S, T)
 $|f| \leq c(S, T)$.

ТЕОРЕМА ФОРДА-ФАЛКЕРСОНА

Теорема. Максимальный поток в сети равен минимальному (s, t) -разрезу.

Теорема'. Следующие условия эквивалентны:

1. Поток f максимален.
2. Остаточная сеть G_f не содержит увеличивающих путей.
3. Существует разрез (S, T) , для которого $|f| = c(S, T)$

$1 \Rightarrow 2$ Если есть увеличивающий путь, то поток не максимален.

$2 \Rightarrow 3$ Если нет увеличивающего пути, то в качестве разреза $S \subset V$ возьмем все вершины, достижимые из s в G_f .

$3 \Rightarrow 1$ Величина любого потока меньше пропускной способности любого разреза.