

АДРИАНОВ Н.М.  
ИВАНОВ А.Б.

# АЛГОРИТМЫ И СТРУКТУРЫ ДАННЫХ

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

# ЗАДАЧА О ДЕМОКРАТИЧЕСКИХ ВЫБОРАХ

---

	Горожане	Пригород	Село
Строительство дорог	-2	5	3
Контроль использования оружия	8	2	-5
Сельхоз субсидии	0	0	10
Налог на бензин	10	0	-2

---

## Дано:

- горожан - 100 000
- пригород - 200 000
- селян - 50 000
- в таблице отдача в тысячах голосов за \$1000 рекламы

**Цель:** Набрать минимум половину голосов в каждом "округе" за минимальные вложения денег.

## ЗАДАЧА О ДЕМОКРАТИЧЕСКИХ ВЫБОРАХ

---

	Горожане	Пригород	Село
Строительство дорог	-2	5	3
Контроль использования оружия	8	2	-5
Сельхоз субсидии	0	0	10
Налог на бензин	10	0	-2

---

## СТАНДАРТНАЯ ФОРМА ЗАДАЧИ ЛП

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

---

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

$$c^T x \rightarrow \max$$

# ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ И СВЕДЕНИЕ К СТАНД. ФОРМЕ

$c^T x \rightarrow \min$	$-c^T x \rightarrow \max$
$a_i^T x \geq b$	$-a_i^T x \leq b$
$a_i^T x = b$ (каноническая)	$a_i^T x \leq b$ $a_i^T x \geq b$
без условия $x_i \geq 0$	$x_i = x_i^+ - x_i^-$ $x_i^+ \geq 0$ $x_i^- \geq 0$

# ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

**Дано:**

- Источники  $S_i$  и их мощность  $s_i$
- Потребители  $T_j$  и их потребности  $t_j$
- Стоимость  $p_{ij}$  доставки товара из  $S_i$  в  $T_j$

**Требуется:** найти схему доставки товара минимальной цены.

# МАКСИМАЛЬНЫЙ ПОТОК

**Дано:**

- Ориентированный граф  $G = (V, E)$
- Для каждого ребра  $(u, v) \in E$  задана пропускная способность  $c(u, v)$
- Исток  $s \in V$ , сток  $t \in V$

**Требуется:** определить максимально возможную величину потока из  $s$  в  $t$ .

# МАКСИМАЛЬНОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ

**Дано:** двудольный граф  $G = (V, E)$

$$V = X \cup Y, \quad \forall (u, v) \in E \quad u \in X, v \in Y$$

**Требуется:** найти независимое подмножество ребер  $M \subset E$

$$\forall (u, v), (u', v') \in M \quad u \neq u', v \neq v'$$

с максимальным количеством элементов.

## РЕШАТЕЛИ ЛП

- Excel
- GLPK (C library + app)  
<http://www.gnu.org/software/glpk/>
- cvxopt (Python package)  
<http://cvxopt.org/>

# ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ: ИСТОРИЯ

- Леонид Канторович, 1939  
«Математические методы организации и планирования производства»  
лауреат Нобелевской премии по экономике 1975 года
- Джордж Данциг, 1947  
симплекс-метод
- Леонид Хачиян, 1979  
метод эллипсоидов, полиномиальное время
- Нарендра Кармаркар, 1984  
метод внутренних точек

## СТАНДАРТНАЯ ФОРМА ЗАДАЧИ ЛП

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

---

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

$$c^T x \rightarrow \max$$

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЗАДАЧИ ЛП

Существует ли решение?

- Несовместная задача
- Неограниченная задача

## СВЕДЕНИЕ СТАНД. ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОЙ

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & + & x_{n+2} & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & + & x_{n+m} & = & b_m \end{array}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m} \geq 0$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

---

$$Ax + x_s = b, \quad x \geq 0, \quad x_s \geq 0$$

$$c^T x \rightarrow \max$$

# DICTIONARY

$$\begin{array}{rcccccc} x_{n+1} & = & b_1 & - & a_{11}x_1 & - & a_{12}x_2 & - & \dots & - & a_{1n}x_n \\ x_{n+2} & = & b_2 & - & a_{21}x_1 & - & a_{22}x_2 & - & \dots & - & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_{n+m} & = & b_m & - & a_{m1}x_1 & - & a_{m2}x_2 & - & \dots & - & a_{mn}x_n \end{array}$$

---

$$z = 0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Пока что: предполагаем, что точка  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  является допустимым решением (равносильно тому, что  $b_i \geq 0$ ).

## PIVOTING: ENTERING / LEAVING VARS

$$\begin{array}{rcccccc} x_{B1} & = & b_1 & + & a_{11}x_{I1} & + & a_{12}x_{I2} & + & \dots & + & a_{1n}x_{In} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_{Bk} & = & b_k & + & a_{k1}x_{I1} & + & a_{k2}x_{I2} & + & \dots & + & a_{kn}x_{In} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_{Bm} & = & b_m & + & a_{m1}x_{I1} & + & a_{m2}x_{I2} & + & \dots & + & a_{mn}x_{In} \\ \hline z & = & c_0 & + & c_1x_{I1} & + & c_2x_{I2} & + & \dots & + & c_nx_{In} \end{array}$$

1. Выбираем  $j$  такое, что  $c_j > 0$
2. Выбираем  $k$  такое, что  $a_{kj} < 0$  и  $-b_k/a_{kj}$  - минимально

## PIVOTING: ENTERING / LEAVING VARS

$$\begin{array}{rcccccc} x_{B1} & = & b_1 & + & a_{11}x_{I1} & + & a_{12}x_{I2} & + & \dots & + & a_{1n}x_{In} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_{Bk} & = & b_k & + & a_{k1}x_{I1} & + & a_{k2}x_{I2} & + & \dots & + & a_{kn}x_{In} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_{Bm} & = & b_m & + & a_{m1}x_{I1} & + & a_{m2}x_{I2} & + & \dots & + & a_{mn}x_{In} \\ \hline z & = & c_0 & + & c_1x_{I1} & + & c_2x_{I2} & + & \dots & + & c_nx_{In} \end{array}$$

1. Выбираем  $j$  такое, что  $c_j > 0$
  2. Выбираем  $k$  такое, что  $a_{kj} < 0$  и  $-b_k/a_{kj}$  – минимально
- 
1.  $\forall j \ c_j \leq 0$ : оптимальное решение найдено
  2.  $\forall k \ a_{kj} \geq 0$ : задача неограничена

## PIVOTING: DICTIONARY TRANSFORM

1. Строка  $k$ :

$$x_{Bk} = b_k + a_{k1}x_{I1} + \dots + a_{kj}x_{Ij} + \dots + a_{kn}x_{In}$$

$$x_{Ij} = \frac{b_k}{-a_{kj}} + \frac{a_{k1}}{-a_{kj}}x_{I1} + \dots + \frac{-1}{-a_{kj}}x_{Bk} + \dots + \frac{a_{kn}}{-a_{kj}}x_{In}$$

2. Остальные строки: подставляем полученное выражение  $x_{Ij}$ .

## ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Что делать, если  $\exists b_i < 0$ ?

Вводим дополнительную переменную  $x_0$ :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & = & b_1 + x_0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & + & x_{n+2} & = & b_2 + x_0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & + & x_{n+m} & = & b_m + x_0 \end{array}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}, x_0 \geq 0$$

$$-x_0 \rightarrow \max$$

1. Вспомогательная задача всегда совместна
2.  $\max = 0 \Leftrightarrow$  исходная задача совместна.

## DICTIONARY ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

$$\begin{array}{rcccccccc} x_{B1} & = & b_1 & + & x_0 & + & a_{11}x_{I1} & + & \dots & + & a_{1n}x_{In} \\ x_{B2} & = & b_2 & + & x_0 & + & a_{21}x_{I1} & + & \dots & + & a_{2n}x_{In} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_{Bm} & = & b_m & + & x_0 & + & a_{m1}x_{I1} & + & \dots & + & a_{mn}x_{In} \\ \hline z & = & 0 & + & -x_0 & & & & & & \end{array}$$

Делаем pivot ( $x_0$  – entering), уменьшая значение целевой функции

$$b_k = \min(b_1, \dots, b_m)$$

$$x_{Ij} = \frac{b_k}{-a_{kj}} + \frac{a_{k1}}{-a_{kj}}x_{Ik} + \dots + \frac{-1}{-a_{kj}}x_{Bk} + \dots + \frac{a_{kn}}{-a_{kj}}x_{In}$$

$$x_0 = \frac{b_k}{-1} + \frac{a_{k1}}{-1}x_{Ik} + \dots + \frac{-1}{-a_{kj}}x_{Bk} + \dots + \frac{a_{kn}}{-a_{kj}}x_{In}$$

## ВЫБОР ENTERING ПЕРЕМЕННОЙ

1. Выбираем первую переменную  $x_j$  с  $c_j > 0$   
(Bland's rule)
2. Выбираем переменную  $x_j$  с максимальным  $c_j$   
(Dantzig's rule)
3. Жадная эвристика: выбираем  $j$  дающую максимальное увеличение целевой функции

Может ли симплекс-метод зациклиться?

Да, в случае вырожденной задачи.

Правило Блэнда гарантирует, что зацикливания не будет.

## СЛОЖНОСТЬ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Pivot выполняется за  $O(nm)$

УТВ. Dictionary восстанавливается однозначно по базисным переменным

СЛЕДСТВИЕ. Количество разных dictionary

$$\leq \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

## ПРИМЕР КЛЕЕ-МИНТУ

$$\begin{array}{rccccccc} x_1 & & & & & & \leq & 1 \\ 20x_1 & + & x_2 & & & & \leq & 100 \\ 200x_1 & + & 20x_2 & + & x_3 & & \leq & 100^2 \\ 2000x_1 & + & 200x_2 & + & 20x_3 & + & x_4 & \leq & 100^3 \\ & & & & \dots & & & & \\ & & & & & & 2 \left( \sum_{i=1}^{k-1} 10^{k-i} x_i \right) & + & x_k & \leq & 10^{k-1} \\ & & & & & & \dots & & & & \end{array}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

$$10^{n-1}x_1 + 10^{n-2}x_2 + \dots + 10x_{n-1} + x_n \rightarrow \max$$

Искаженный куб. Симплекс метод с правилом Данцига проходит по всем  $2^n$  вершинам.