

ИВАНОВ А.Б.

# АЛГОРИТМЫ И СТРУКТУРЫ ДАННЫХ

NP-полные задачи

# НАШ СПИСОК



# ТРЁХДОЛЬНОЕ СОЧЕТАНИЕ

**Дано:**

- три непересекающиеся множества  $X, Y, Z$ ;
- $M \subseteq X \times Y \times Z$

**Требуется:**

Существует ли подмножество  $M$ , покрывающее  $X \cup Y \cup Z$ ?

**Утверждение:** Задача трёхдольного сочетания - NP-полная.

# КОНСТРУКЦИЯ

**Дано:** 3-SAT. Пусть  $m$  - количество переменных,  $k$  - количество дизъюнктов.

**Гаджеты** для каждой переменной  $x_i$ :

- кольцо из  $a_{i,1}, \dots, a_{i,2k}$
- свободные концы  $b_{i,1}, \dots, b_{i,2k}$
- тройки  $(a_{i,j}, a_{i,j+1}, b_{i,j})$  для всех  $j = 1 \dots 2k$

**Гаджеты** для каждого дизъюнкта:

- пара  $p_{t,1}, p_{t,2}$  для  $t = 1 \dots k$
- для каждого литерала  $x_i$  или  $\bar{x}_i$  тройка  $(p_{t,1}, p_{t,2}, b_{i,j})$ ,  $b_{i,j}$  не используется в других таких тройках,  $j$  четное для  $x_i$  и нечетное для  $\bar{x}_i$

# КОНСТРУКЦИЯ

**Гаджеты** сборщики мусора:

- $(m - 1)k$  пар  $c_{l,1}, c_{l,2}$
- для каждого  $l$  все возможные тройки  $(c_{l,1}, c_{l,2}, b_{i,j})$

## ПРИМЕР

$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$

# УНЕ

Разрешимо ли уравнение

$$Ax = \mathbf{1}$$

где  $A$  - матрица из нулей и единиц,  $x$  - вектор из нулей и единиц?

Пусть у нас  $|X| = |Y| = |Z| = m$ ,  $|M| = n$ . Тогда  $x_i$  - берем ли  $i$ -ую тройку.

Трёхдольное сочетание  $\rightarrow$  УНЕ

УНЕ  $\rightarrow$  ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ

## ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ $\rightarrow$ КОММИВОЯЖЁР

Пусть  $G$  – входной граф для задачи о гамильтоновом цикле.

Присвоим длину 1 всем ребрам графа  $G$ . Проведем ребра между всеми парами вершин, между которыми еще не было ребер, и присвоим им длину  $1 + \alpha$ .

Количество ребер гамильтонова цикла в графе с  $V$  вершинами равна  $V$ .

Коммивояжёр может объехать за  $V \Leftrightarrow$  в исходном графе есть гамильтонов цикл.

УНЕ → ЦЛП

## УНЕ $\rightarrow$ СУММА ПОДМНОЖЕСТВВА

Идея: рассмотрим столбцы матрицы как числа в двоичной системе исчисления.

## СУММА ПОДМНОЖЕСТВВА $\rightarrow$ ЗАДАЧА О РЮКЗАКЕ

Переформулируем задачу о рюкзаке в виде задачи поиска:

**Дано:**

- Рюкзак максимальной вместимости  $W$  (по весу)
- $n$  предметов, для которых задан вес  $w_i$  и ценность  $v_i$
- число  $g$  (goal = цель)

**Требуется:** Выбрать предметы общего веса  $\leq W$  и суммарной ценности  $\geq g$ .

---

Частный случай задачи о рюкзаке: все  $v_i = w_i$  и  $g = W$ .

**Дано:**

- $n$  чисел  $v_i$
- число  $g$

**Требуется:** выбрать подмножество этих чисел, чтобы общая сумма равнялась  $g$ .