Адрианов Н.М.
Иванов А.Б.

Алгоритмы и структуры данных

Минимальные покрывающие деревья. Алгоритм Прима. Алгоритм Крускала. Система непересекающихся множеств

Деревья

Граф G - дерево, если:

- G - связный ациклический граф
- G - ациклический граф и добавление любого ребра создает цикл
- G - связный граф и удаление любого ребра нарушвет связность
- G - связный и $|E| = |V| - 1$

Покрывающие деревья

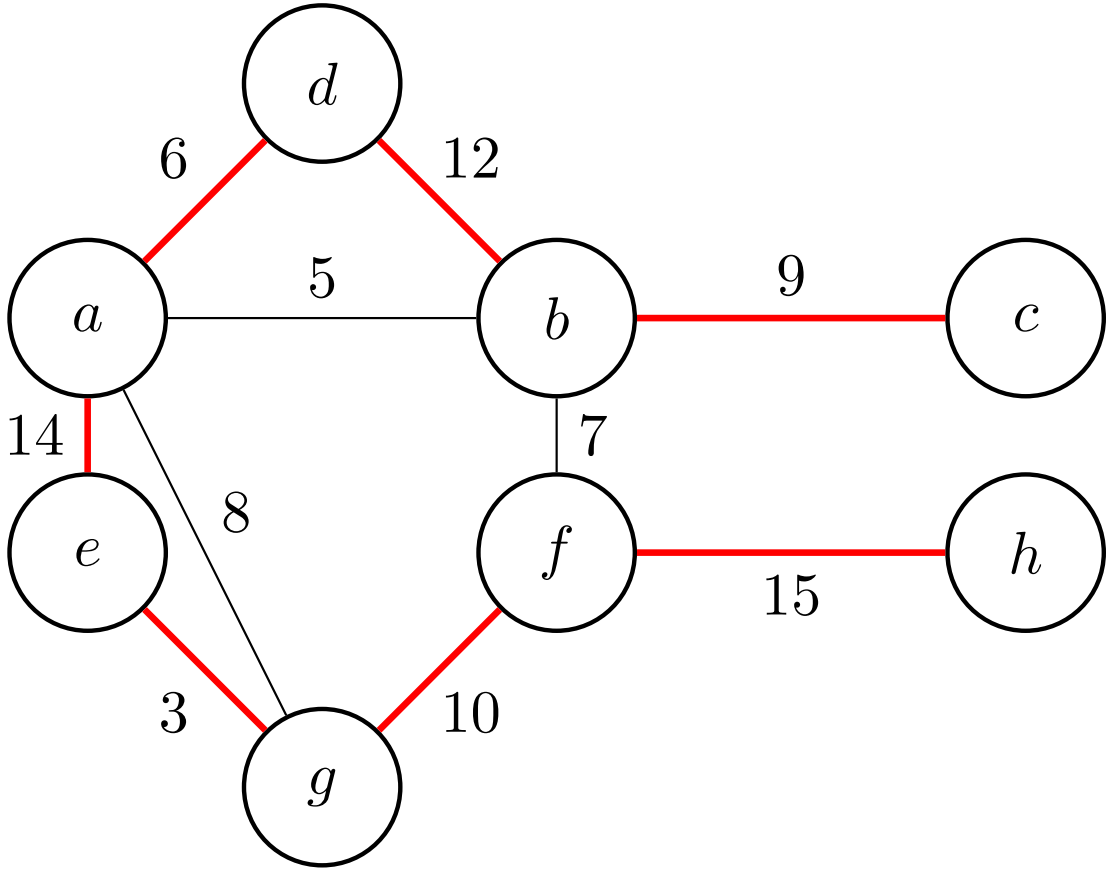
(V, E) – связный неориентированный граф
$l : E \to \mathbb{R}$ – длины ребер

Покрывающее (остовное) дерево T:
вершины $V(T) = V$
ребра $E(T) \subset E$

Минимальное покрывающее дерево: $\sum_{e \in E(T)} l(e) \to \min$

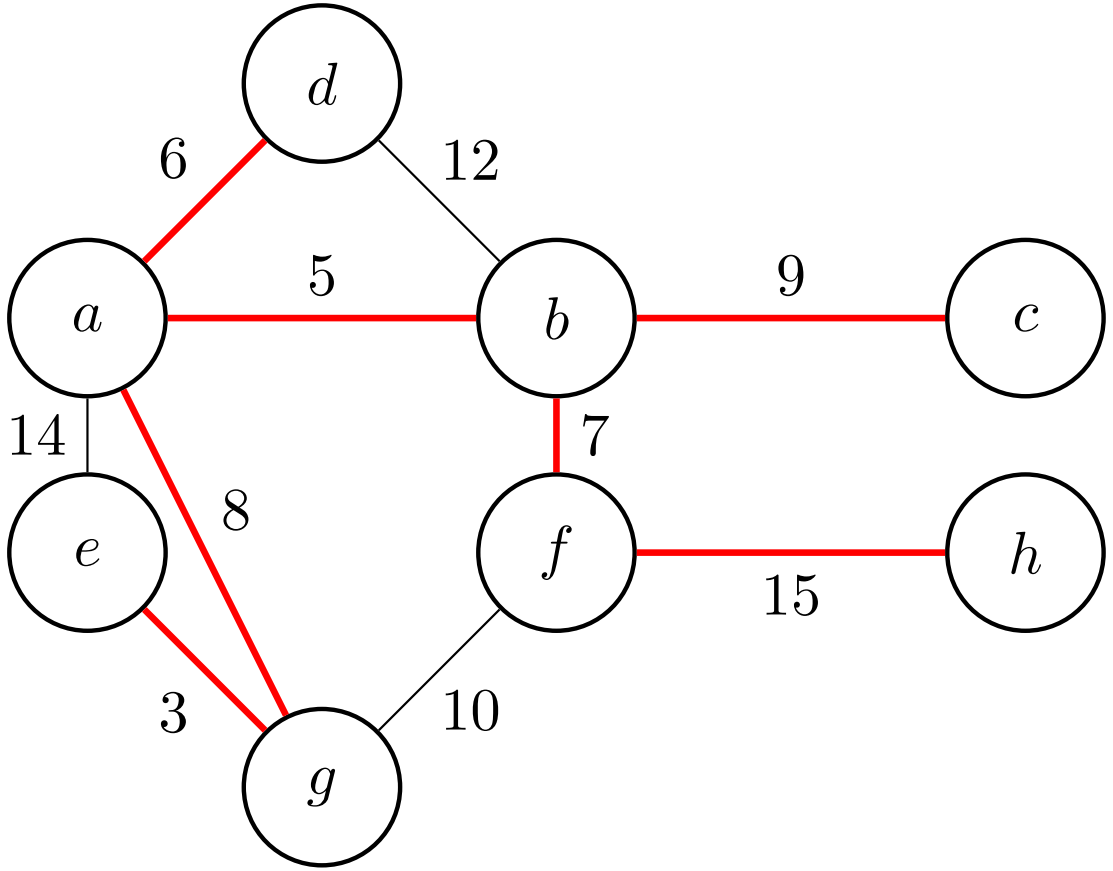
MST = Minimal Spanning Tree

Пример покрывающего дерева №1



$$\sum_{e \in E(T)} l(e) = 69$$

Пример покрывающего дерева №2



$$\sum_{e \in E(T)} l(e) = 53$$

Применения MST

- сети - электрические, компьютерные, водоснабжения, транспортные и т.п.
- разработка микросхем
- составляющая часть других алгоритмов (Алгоритм Кристофидеса)

Алгоритм Прима

Сложность - $O(E \log V)$

```
procedure Prim( G ):
  visited = array of size G.V
  T = graph( G.V )
  Q = priority queue

  x = any vertex from V
  for z in G.neighbours(x):
    Q.insert((x,z), l(x,z))
  end

  while not Q.isEmpty:
    (x,y) = Q.deleteMin()
    if not visited[y]:
      visited[y] = true
      T.addEdge(x,y)
      for z in G.neighbours(y):
        Q.insert((y,z), l(y,z))
      end
    end
  end
end
```

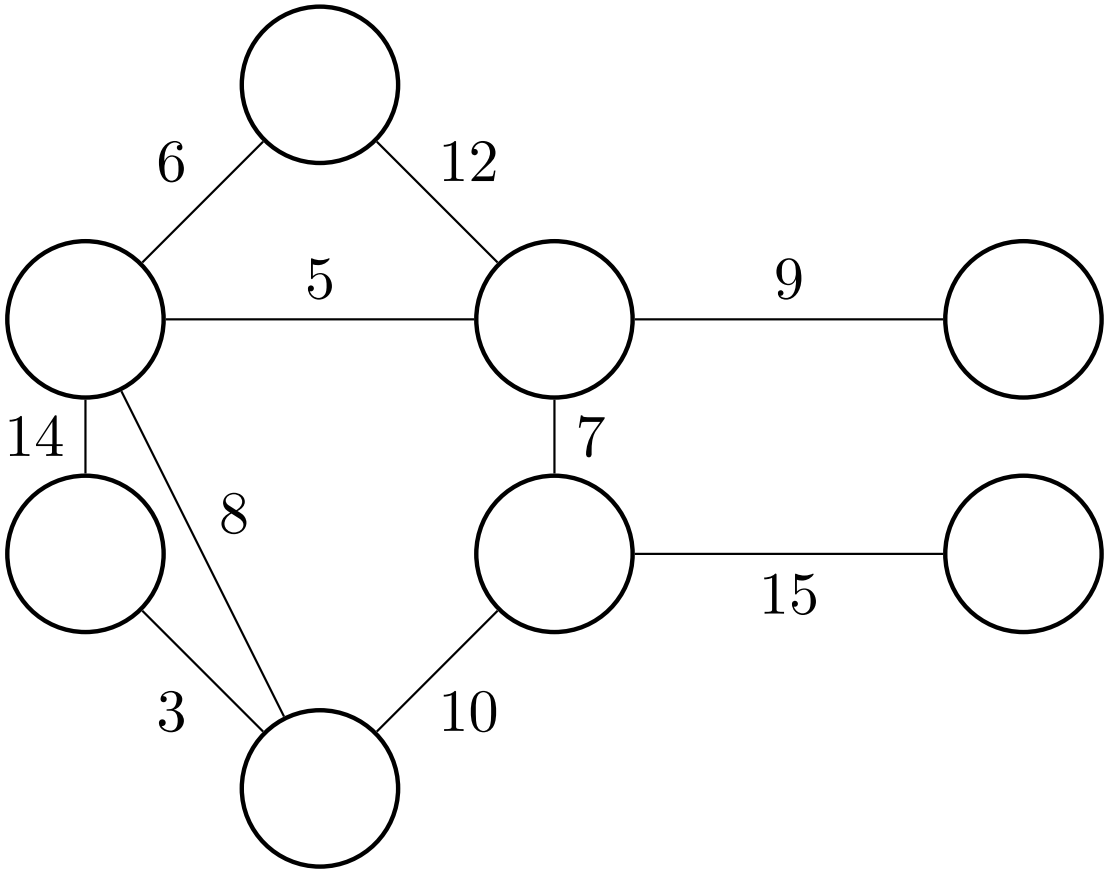
Свойство разреза

Разрез: вершины разбиты на 2 части: S и $V \setminus S$.

- ребра X входят в минимальное покрывающее дерево T
- ни одно ребро из X не пересекает разрез
- e – ребро минимальной длины, пересекающее разрез

$\Rightarrow$ Ребра $X \cup \{e\}$ входят в минимальное покрывающее дерево T'.

Алгоритм Прима, пример



Алгоритм Крускала

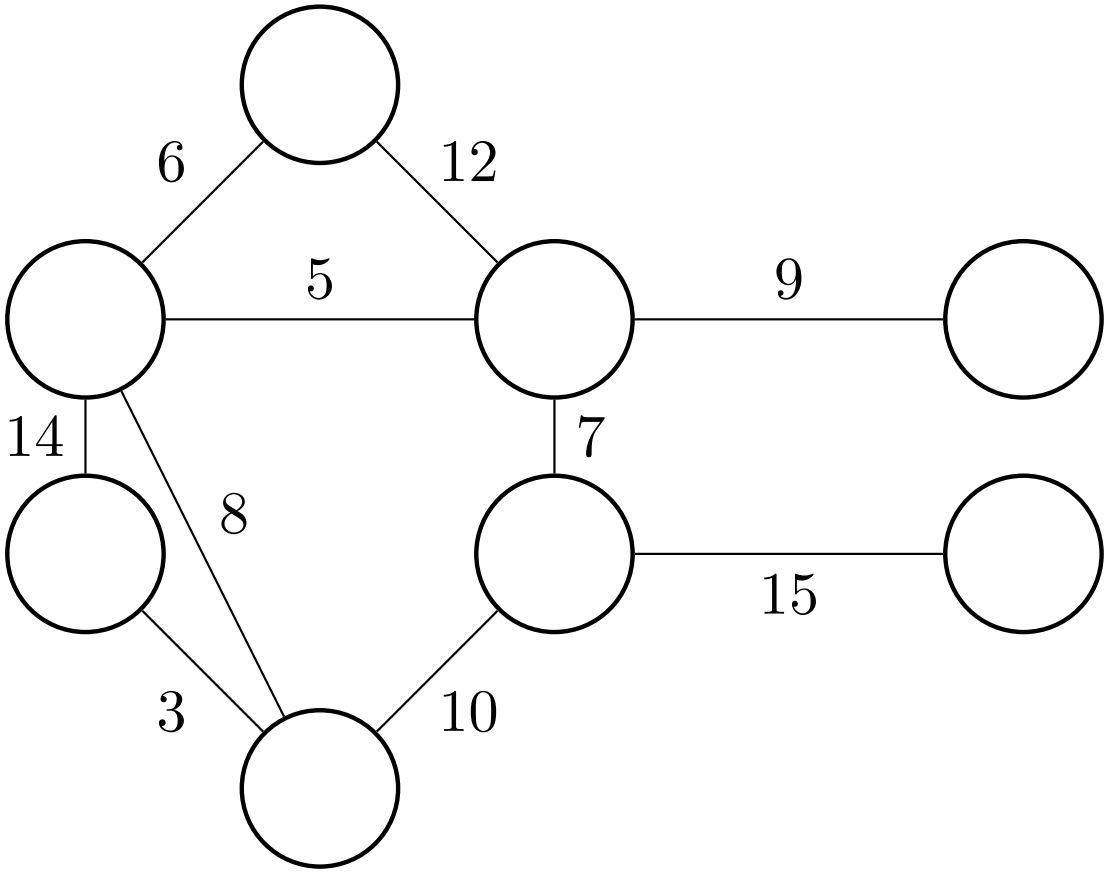
Сложность:

- Сортировка - $O(E \log V)$
- Проверка на цикл - ?!

```
procedure Kruskal( G ):

  E′ = E отсортированный по
       возрастанию длины
  X = ∅
  for e in E′:
    if X ∪ e не содержит циклов:
       X = X ∪ e
    end
  end
end
```

Алгоритм Крускала, пример



Непересекающиеся множества (Union-Find)

```
class UnionFind {
  UnionFind(int N)

  void union(int x, int y)
  int find(x)

  boolean
    connected(int x, int y)
  int count()
}
```

```
connected(x,y):
  find(x) == find(y)
```

```
procedure Kruskal( G ):

  E′ = E отсортированный по
       возрастанию длины
  T = graph( G.V )
  UF = UnionFind( G.V )
  for (u,v) in E′:
    if !UF.connected(u,v):
      T.addEdge(u,v)
      UF.union(u,v)
    end
  end
end
```

Union-Find: реализация

- Храним номер компоненты для каждой точки.
  `union` точек из разных компонент меняет номер в одной из компонент.
  `find`: $O(1)$
  `union`: $O(n)$

- Храним номер родителя для каждой точки.
  `union` точек из разных компонент прописывает корень одной точки как родителя корня другой.
  `find` поднимается до корневой вершины, номер корневой вершины и будет номером компоненты.
  `find`: $O(n)$
  `union`: $O(1)$ (но для `union` нужно сделать 2 `find`)

Union-Find: реализация

```
public class UnionFind {
  private int[] parent;

  public UnionFind(int N) {
    parent = new int[N];
    for (int i = 0; i < N; i++)
      parent[i] = i;
  }

  public int find(int x) {
    while (x != parent[x])
      x = parent[x];
    return x;
  }

  public void union(int x, int y) {
    x = find(x);
    y = find(y);
    if (x == y) return;
    parent[x] = y;
  }
}
```

Union-Find: детали реализации

Union-Find: ранги

`find` имеет сложность $O(n)$, так как могут получаться «высокие» деревья.

Идея: будем хранить высоту дерева (ранг). Будем прицеплять меньшее дерево к большему.

- если $\pi(x) \neq x$, то $rank(x) < rank(\pi(x))$
- если $rank(x) = k$, то в дереве под x – не менее 2^k вершин
- максимально возможный ранг равен $[\log n]$

($\pi(x)$ - родитель вершины x)

Union-Find: ранги

```
public class UnionFind {
  private int[] rank;

  public UnionFind(int N) {
    ...
    rank = new int[N];
    for (int i = 0; i < N; i++)
      rank[i] = 0;
  }

  public void union(int x, int y) {
    x = find(x);
    y = find(y);
    if (x == y) return;
    if (rank[x] < rank[y])
      parent[x] = y;
    else {
      parent[y] = x;
      if (rank[x] == rank[y])
        rank[x]++;
    }
  }
}
```

Union-Find: сжатие путей

Идея: При вызове `find(x)` мы проходим все вершины до корня. Можем все эти вершины перевесить к корню.

```
public class UnionFind {

    ...

  public void find(int x) {
    if (parent[x] == x) return x;
    return parent[x] = find(x);
  }

    ...

}
```

Union-Find: сжатие путей – сложность

$$\textsc{Tower}(k) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$$

$\log^* n =$ минимальное k такое, что $\underbrace{\log \log \ldots \log}_{k \text{ раз}} n \leq 1$

$\textsc{Tower}(1) = 2$
$\textsc{Tower}(2) = 2^2 = 4$
$\textsc{Tower}(3) = 2^4 = 16$
$\textsc{Tower}(4) = 2^{16} = 65636$
$\textsc{Tower}(5) = 2^{65636}$

n	$\log^* n$
1	0
2	1
3,4	2
5,6,... 16	3
$17, 18, \ldots 65536$	4
$65537, \ldots 2^{65536}$	5

Union-Find: сжатие путей – сложность

Когда вершина x перестает быть корнем – ее ранг больше не меняется. Если $rank(x) \in \{k+1, \dots 2^k\}$, где $k = \textsc{Tower}(i)$, то «выдаем» вершине 2^k рублей.

Если $rank(x) = k$, то в дереве под x не менее 2^k вершин.
Следовательно, число вершин ранга k не более $n/2^k$.
Число вершин ранга $> k$

$$\leq \frac{n}{2^{k+1}} + \frac{n}{2^{k+2}} + \dots = \frac{n}{2^k} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{n}{2^k}$$

Значит, всего «выдали» не более $n \log^* n$ рублей.

При вызове метода `find` движемся наверх к корню – если $rank(x)$ и $rank(\pi(x))$ лежат в одном интервале, то берем рубль у вершины x. Переходов между интервалами – не более $\log^* n$.

Итого: m вызовов `union` / `find` требуют $O(n \log^* n + m \log^* n)$ операций. Амортизированная стоимость $= O(\log^* n)$.

Функция Аккермана

$$A_1(n) = DOUBLE(n) = 2 * n$$
$$A_2(n) = EXPONENT(n) = \underbrace{A_1(A_1(...A_1(1))}_{n \text{ раз}} = 2^n$$
$$A_3(n) = TOWER(n) = \underbrace{A_2(A_2(...A_2(1))}_{n \text{ раз}}$$
$$A_4(n) = WOW(n) = \underbrace{A_3(A_3(...A_3(1))}_{n \text{ раз}}$$
$$WOW(1) = TOWER(1) = 2$$
$$WOW(2) = TOWER(2) = 4$$
$$WOW(3) = TOWER(4) = 65536$$
$$WOW(4) = TOWER(65536) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{65536 \text{ раз}}$$

$\alpha(n) =$ минимальное k такое, что $A_k(1) \geq n$

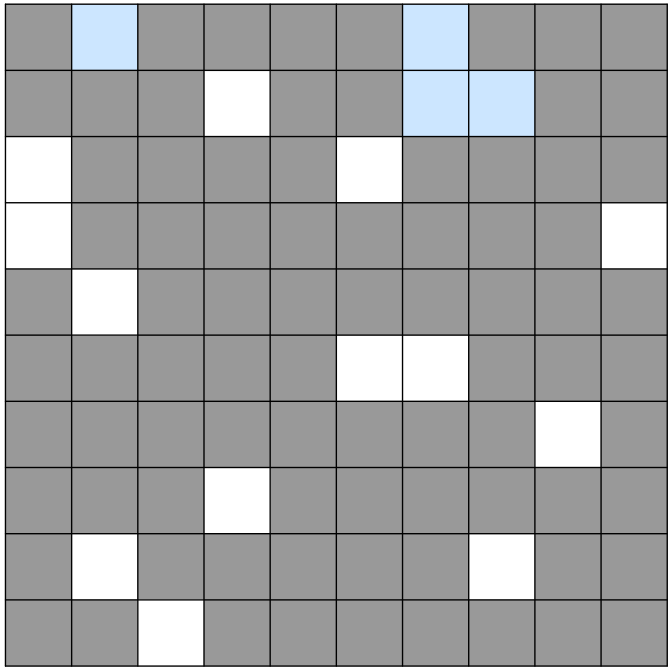
Функция Аккермана

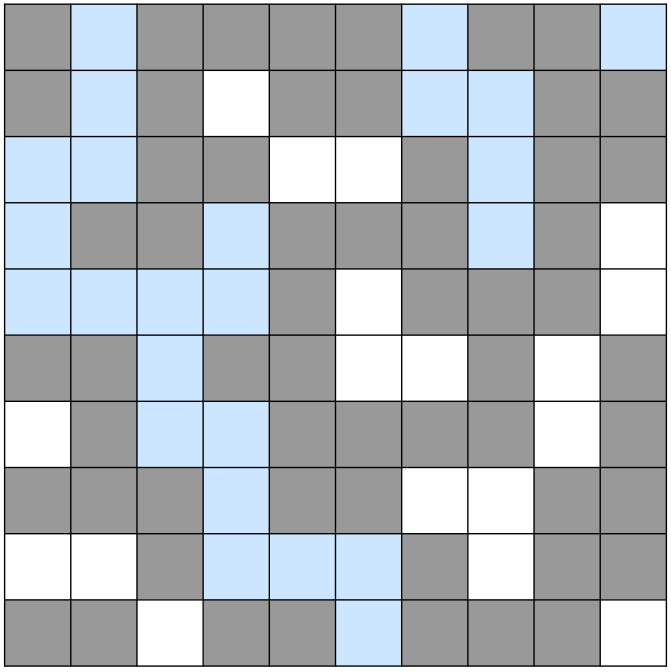
Утверждение: Амортизированная стоимость метода `find` $= O(\alpha(n))$.

Просачивание (percolation)

Модель:

- Квадратная решетка $N \times N$.
- «Открываются» случайные клетки.
- Просачивание: сверху вниз через «открытые» клетки.





Порог просачивания

$p = (\text{количество открытых клеток})/N^2$

Какую долю p от всех клеток надо открыть, чтобы возникло просачивание?

$p^* = 0.592746\ldots$