Иванов А.Б.

Алгоритмы и структуры данных

Потоки в сетях

Теорема Форда-Фалкерсона

Теорема. Максимальный поток в сети равен минимальному (s, t)-разрезу.

Теорема'. Следующие условия эквивалентны:

1. Поток f максимален.
2. Остаточная сеть G_f не содержит увеличивающих путей.
3. Существует разрез (S, T), для которого $|f| = c(S, T)$

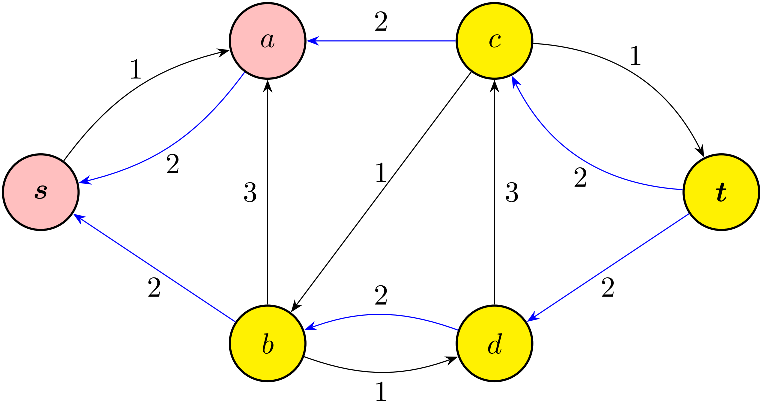
$1 \Rightarrow 2$ Если есть увеличивающий путь, то поток не максимален.

$2 \Rightarrow 3$ Если нет увеличивающего пути, то в качестве разреза $S \subset V$ возьмем все вершины, достижимые из s в G_f.

$3 \Rightarrow 1$ Величина любого потока меньше пропускной способности любого разреза.

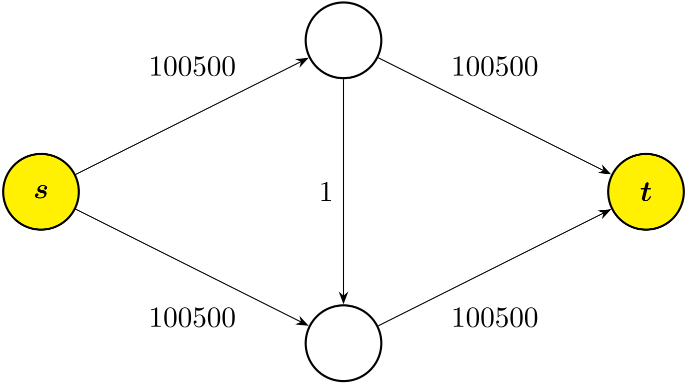
Минимальный разрез

Как найти минимальный разрез?

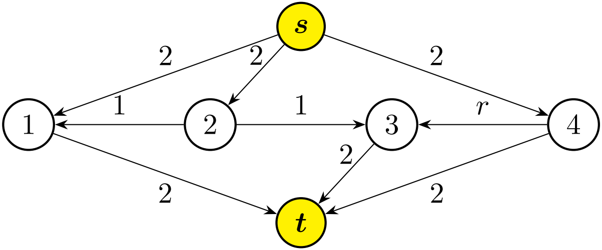


Сложность алгоритм Форда-Фалкерсона

Сложность: $O(E \cdot |f^*|)$, где f^* – максимальный поток.



Алгоритм Форда-Фалкерсона не работает



$$r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$r^2 = 1 - r$$

Путь	δ	1	$\leftarrow$	2	$\rightarrow$	3	$\leftarrow$	4
$-$			1		1		r	
$2-3$	1		1		0		r	
$4-3-2-1$	r		$1-r$		r		0	
$2-3-4$	r		r^2		0		r	
$4-3-2-1$	r^2		0		r^2		$r-r^2$	
$1-2-3$	r^2		r^2		0		r^3	

Алгоритм Эдмондса-Карпа

В алгоритме Форда-Фалкерсона будем выбирать *кратчайший* увеличивающий путь.

Алгоритм Эдмондса-Карпа

В алгоритме Форда-Фалкерсона получаем последовательность остаточных сетей $G = G_0, G_1, \ldots G_t, \ldots$

Пусть $d_t(v) =$ расстояние (количество ребер) от s до v в сети G_t.

Лемма 1. Расстояние не убывает: $d_t(v) \leq d_{t+1}(v)$.

Док-во. Предположим противное: для некоторого t есть вершины, для которых это нарушено. Выберем v – ближайшую к s такую вершину в G_{t+1}. Пусть u – предпоследняя вершина в кратчайшем пути от s к v в G_{t+1}. Тогда

$$d_t(u) \leq d_{t+1}(u), \qquad d_t(v) > d_{t+1}(v), \qquad d_{t+1}(v) = d_{t+1}(u) + 1$$

$$\Rightarrow d_t(v) > d_{t+1}(v) = d_{t+1}(u) + 1 \geq d_t(u) + 1$$

Следовательно, в сети G_t не было (u, v). Откуда же оно появилось в сети G_{t+1}? Значит, в увеличивающем пути p_t было ребро (v, u). Но увеличивающий путь – кратчайший, значит, $d_t(v) = d_t(u) - 1$, а мы показали, что $d_t(v) > d_t(u) + 1$. Противоречие.

Алгоритм Эдмондса-Карпа

Назовем ребро увеличивающего пути критическим, если его емкость совпадает с пропускной способностью пути.

Лемма 2. Если ребро (u, v) было критическим в моменты t_1 и t_2, то $d_{t_2}(v) \geq d_{t_1}(v) + 2$.

Док-во. (u, v) – критическое ребро в G_{t_1}, значит, оно отсутствует в сети G_{t_1+1}. Но оно есть в G_{t_2}, значит, в какой-то момент времени оно появляется опять. Значит, в какой-то сети G_s для $t_1 < s < t_2$ увеличивающий путь содержит ребро (v, u), т.е. $d_s(u) = d_s(v) + 1$. Тогда

$$d_{t_2}(v) = d_{t_2}(u) + 1 \geq d_s(u) + 1 = d_s(v) + 2 \geq d_{t_1}(v) + 2.$$

Поскольку кратчайший путь не может содержать более V вершин, то $d_t(v) \leq V - 1$. Следовательно, ребро может быть критическим не более, чем $(V - 1)/2 + 1$ раз.

Алгоритмы поиска максимального потока

TODO

- Эдмондс-Карп (1970) $O(VE^2)$
- Диниц (1970) $O(V^2E)$
- ...
- Кинг, Рао и Тарьян (2013) $O(VE\log_{\frac{E}{V\log V}} V)$
- ...
- Чен, Кинг, Лиу, Пен, Гутенберг, Сахдева (2022) $O(E^{1+o(1)}\log U)$ (U - максимальная емкость ребра после приведения к целочисленным емкостям)
- ...

Задача о максимальном паросочетании

Дано: m задач, каждая выполняется единицу времени; n сотрудников, для каждого известно какие задачи он может выполнять.

Найти: максимальное количество задач, которое можно выполнить за единицу времени.

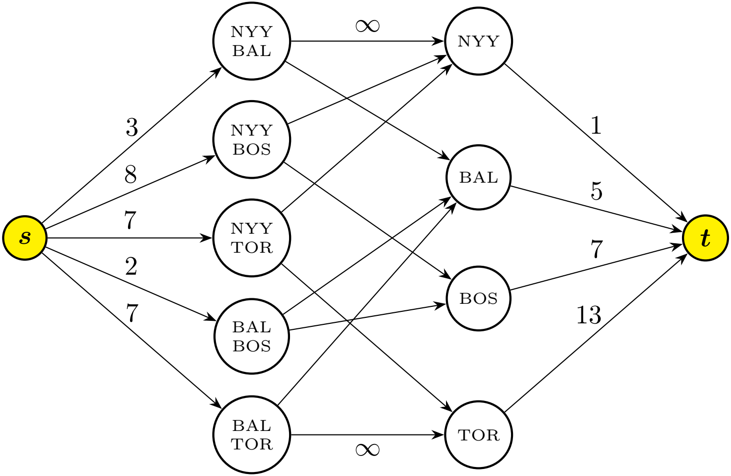
Паросочетанием в двудольном графе называется множество его ребер такое, что никакие два ребра не имеют общих вершин.

Бейсбол

Команда	В	И	NYY	BAL	BOS	TOR	DET
New York Yankees	75	28		3	8	7	3
Baltimore Orioles	71	28	3		2	7	4
Boston Red Sox	69	27	8	2		0	0
Toronto Blue Jays	63	27	7	7	0		0
Detroit Tigers	49	27	3	4	0	0	

В плей-офф проходит одна команда из лиги. Есть ли шансы у Detroit Tigers? Спортивные комментаторы в 1996 году говорили, что есть: $49 + 27 = 76 > 75$.

Бейсбол



Утв. Detroit Tigers может занять первое место только, если существует поток, полностью использующий все емкости ребер, исходящих из s.