

1. (*Числа Каталана*). Правильной скобочной структурой называется последовательность из n открывающих и n закрывающих скобок такая, что если мы будем считать скобки слева направо, то в любой момент времени количество открывающих скобок будет не меньше количества закрывающих скобок. Количество правильных скобочных структур из n пар скобок обозначается c_n .

- а) Выпишите все правильные скобочные структуры для $n = 1, 2, 3, 4$.
 б) Докажите рекуррентное соотношение

$$c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + \dots + c_{n-1} c_1 + c_n c_0$$

- в) Введем производящую функцию для чисел c_n :

$$F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

Докажите соотношение $1 + xF(x)^2 = F(x)$.

- г) Докажите формулу

$$c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

Плоским деревом называется дерево, вложенное в плоскость. Плоским корневым деревом называется плоское дерево, у которого отмечено одно из висячих ребер (корень). Бинарным деревом называется плоское корневое дерево с $2n + 1$ ребром, у которого степени всех вершин равны 1 или 3.

- д) Нарисуйте все плоские корневые деревья с 1, 2, 3, 4, 5 ребрами.
 е) Придумайте способ установить взаимнооднозначное соответствие между плоскими корневыми деревьями с $n + 1$ ребром и правильными скобочными структурами из n пар скобок.

- ж) Нарисуйте все бинарные деревья с 3, 5, 7, 9 ребрами.

- з) Придумайте способ установить взаимнооднозначное соответствие между бинарными деревьями с $2n + 1$ ребрами и плоскими корневыми деревьями с $n + 1$ ребром.

Возьмем выпуклый n -угольник и проведем в нем $n - 3$ непересекающиеся диагонали. В результате получится диагональная триангуляция: n -угольник будет разбит диагоналями на треугольники.

- и) Нарисуйте все диагональные триангуляции 3-, 4-, 5-, 6-угольника с одной отмеченной стороной.

- к) Придумайте способ установить взаимнооднозначное соответствие между бинарными деревьями с $2n + 1$ ребрами и триангуляциями $n + 2$ -угольника с одной отмеченной стороной.

2. (*Теория Рамсея*)

- а) На вечеринке встретились $N = 6$ человек. Докажите, что среди них найдутся либо 3 попарно знакомых человека, либо 3 попарно незнакомых.

- б) Покажите, что $N = 5$ недостаточно, чтобы утверждение пункта а) было верно.

- в) Докажите, что среди $N = 10$ человек всегда найдется 3 попарно знакомых человека, либо 4 попарно незнакомых.

- г) Покажите, что $N = 8$ недостаточно, чтобы утверждение пункта в) было верно.

3. Докажите, что при любой раскраске чисел $1, 2, 3, \dots, 9$ в два цвета всегда найдутся 3 числа одного цвета, образующие арифметическую прогрессию.

4. 2-SAT. Имеется n булевских переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Дана формула в конъюнктивной нормальной форме, каждый дизъюнкт которой состоит из двух переменных:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigwedge_{\alpha} (z_{\alpha} \vee w_{\alpha}), \quad \text{где } z_{\alpha}, w_{\alpha} = x_i \text{ или } \bar{x}_i$$

Требуется найти такие значения переменных x_1, x_2, \dots, x_n , чтобы значение $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ было истинным.

Придумайте способ переформулировать эту задачу на языке теории графов.
(Что взять в качестве вершин? Как провести ребра?)