Адрианов Н.М.
Иванов А.Б.

# Алгоритмы и структуры данных

## Линейное программирование

# Задача о диете

| | Calorie (1000) | Protein (g) | Calcium (g) | Iron (mg) | Vitamin-A (1000IU) | Vitamin-B1 (mg) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wheat | 44.7 | 1411 | 2.0 | 365 | . | 55.4 | |
| Cornmeal | 36 | 897 | 1.7 | 99 | 30.9 | 17.4 | |
| Cannedmilk | 8.4 | 422 | 15.1 | 9 | 26 | 3 | ... |
| Margarine | 20.6 | 17 | .6 | 6 | 55.8 | .2 | |
| Cheese | 7.4 | 448 | 16.4 | 19 | 28.1 | .8 | |
| Peanut-B | 15.7 | 661 | 1 | 48 | . | 9.6 | |
| | | | ... | | | | |

**Дано:**

- список продуктов (название, цена)
- таблица содержания питательных веществ
- минимальное и максимальное допустимое количество каждого питательного вещества в день

**Цель:** составить диету минимальной цены

# Задача о диете

| | Calorie (1000) | Protein (g) | Calcium (g) | Iron (mg) | Vitamin-A (1000IU) | Vitamin-B1 (mg) | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wheat | 44.7 | 1411 | 2.0 | 365 | . | 55.4 | |
| Cornmeal | 36 | 897 | 1.7 | 99 | 30.9 | 17.4 | |
| Cannedmilk | 8.4 | 422 | 15.1 | 9 | 26 | 3 | ... |
| Margarine | 20.6 | 17 | .6 | 6 | 55.8 | .2 | |
| Cheese | 7.4 | 448 | 16.4 | 19 | 28.1 | .8 | |
| Peanut-B | 15.7 | 661 | 1 | 48 | . | 9.6 | |
| | | | ... | | | | |

# Стандартная форма задачи ЛП

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array}
$$

$$x_1,\, x_2,\, \dots x_n \geq 0$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

---

$$Ax \leq b,\ \ x \geq 0$$

$$c^T x \to \max$$

# Сведение задачи $A$ к задаче $B$

Существуют алгоритмы $f$ и $g$ такие, что

- для любых $I_A$ – входных данных для задачи $A$;
- $I_B = f(I_A)$ – входные данные для $B$;
- $S_B$ – решение задачи $B$ со входными данными $I_B$;
- $S_A = g(S_B)$ – решение задачи $A$ с входными данными $I_A$.

$$\begin{tikzcd}
I_A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & I_B \arrow[d] \\
A \arrow[d] & B \arrow[d] \\
S_A & S_B \arrow[l, "g"']
\end{tikzcd}$$

# Варианты задач и сведение к станд. форме

| | |
|---|---|
| $c^T x \to \min$ | $-c^T x \to \max$ |
| $a_i^T x \geq b$ | $-a_i^T x \leq b$ |
| $a_i^T x = b$<br>(каноническая) | $a_i^T x \leq b$<br>$a_i^T x \geq b$ |
| без условия $x_i \geq 0$ | $x_i = x_i^+ - x_i^-$<br>$x_i^+ \geq 0$<br>$x_i^- \geq 0$ |

# Транспортная задача

**Дано:**

- Источники $S_i$ и их мощность $s_i$
- Потребители $T_j$ и их потребности $t_j$
- Стоимость $p_{ij}$ доставки товара из $S_i$ в $T_j$

**Требуется:** найти схему доставки товара минимальной цены.

# Максимальный поток

**Дано:**

- Ориентированный граф $G = (V, E)$
- Для каждого ребра $(u, v) \in E$ задана пропускная способность $c(u, v)$
- Исток $s \in V$, сток $t \in V$

**Требуется:** определить максимально возможную величину потока из $s$ в $t$.

# Максимальное паросочетание

**Дано:** двудольный граф $G = (V, E)$

$$V = X \cup Y, \quad \forall\,(u, v) \in E \quad u \in X,\, v \in Y$$

**Требуется:** найти независимое подмножество ребер $M \subset E$

$$\forall\,(u, v),\, (u', v') \in M \quad u \neq u',\, v \neq v'$$

с максимальным количеством элементов.

# Решатели ЛП

- Excel
- GLPK (C library + app)
  `http://www.gnu.org/software/glpk/`
- cvxopt (Python package)
  `http://cvxopt.org/`

$$x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{array}{rcrcr} -3x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & x_2 & \leq & 11 \\ x_1 & + & -x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & & & \leq & 6 \end{array}$$

$$x_1,\, x_2 \geq 0$$

# Линейное программирование: история

- Леонид Канторович, 1939
  «Математические методы организации и планирования производства»
  лауреат Нобелевской премии по экономике 1975 года

- Джордж Данциг, 1947
  симплекс-метод

- Леонид Хачиян, 1979
  метод эллипсоидов, полиномиальное время

- Нарендра Кармаркар, 1984
  метод внутренних точек

# Стандартная форма задачи ЛП

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array}$$

$$x_1,\, x_2,\, \ldots x_n \geq 0$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

---

$$Ax \leq b,\ \ x \geq 0$$

$$c^T x \to \max$$

# Геометрический смысл задачи ЛП

Существует ли решение?

- Несовместная задача
- Неограниченная задача

# Сведение станд. формы к канонической

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & + & x_{n+2} & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & + & x_{n+m} & = & b_m
\end{array}$$

$$x_1,\, x_2,\, \ldots\, x_n,\, x_{n+1},\, \ldots\, x_{n+m} \geq 0$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

---

$$Ax + x_s = b, \quad x \geq 0,\; x_s \geq 0$$

$$c^T x \to \max$$

# Dictionary

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_{n+1} & = & b_1 & - & a_{11}x_1 & - & a_{12}x_2 & - & \ldots & - & a_{1n}x_n \\
x_{n+2} & = & b_2 & - & a_{21}x_1 & - & a_{22}x_2 & - & \ldots & - & a_{2n}x_n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
x_{n+m} & = & b_m & - & a_{m1}x_1 & - & a_{m2}x_2 & - & \ldots & - & a_{mn}x_n \\
\hline
z & = & 0 & + & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \ldots & + & c_nx_n
\end{array}
$$

Пока что: предполагаем, что точка $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является допустимым решением (равносильно тому, что $b_i \geq 0$).

# Pivoting: entering / leaving vars

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_{B1} & = & b_1 & + & a_{11}x_{I1} & + & a_{12}x_{I2} & + & \ldots & + & a_{1n}x_{In} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
x_{Bk} & = & b_k & + & a_{k1}x_{I1} & + & a_{k2}x_{I2} & + & \ldots & + & a_{kn}x_{In} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
x_{Bm} & = & b_m & + & a_{m1}x_{I1} & + & a_{m2}x_{I2} & + & \ldots & + & a_{mn}x_{In} \\
\hline
z & = & c_0 & + & c_1x_{I1} & + & c_2x_{I2} & + & \ldots & + & c_nx_{In}
\end{array}
$$

1. Выбираем $j$ такое, что $c_j > 0$
2. Выбираем $k$ такое, что $a_{kj} < 0$ и $-b_k/a_{kj}$ – минимально

# Pivoting: entering / leaving vars

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_{B1} & = & b_1 & + & a_{11}x_{I1} & + & a_{12}x_{I2} & + & \dots & + & a_{1n}x_{In} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
x_{Bk} & = & b_k & + & a_{k1}x_{I1} & + & a_{k2}x_{I2} & + & \dots & + & a_{kn}x_{In} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
x_{Bm} & = & b_m & + & a_{m1}x_{I1} & + & a_{m2}x_{I2} & + & \dots & + & a_{mn}x_{In} \\
\hline
z & = & c_0 & + & c_1x_{I1} & + & c_2x_{I2} & + & \dots & + & c_nx_{In}
\end{array}
$$

1. Выбираем $j$ такое, что $c_j > 0$
2. Выбираем $k$ такое, что $a_{kj} < 0$ и $-b_k/a_{kj}$ – минимально

1. $\forall j \ \ c_j \leq 0$: оптимальное решение найдено
2. $\forall k \ \ a_{kj} \geq 0$: задача неограничена

# Pivoting: dictionary transform

1. Строка $k$:

$$x_{Bk} = b_k + a_{k1}x_{I1} + \ldots + a_{kj}x_{Ij} + \ldots + a_{kn}x_{In}$$

$$\color{red}{x_{Ij}} = \frac{b_k}{-a_{kj}} + \frac{a_{k1}}{-a_{kj}}x_{Ik} + \ldots + \color{red}{\frac{-1}{-a_{kj}}x_{Bk}} + \ldots + \frac{a_{kn}}{-a_{kj}}x_{In}$$

2. Остальные строки: подставляем полученное выражение $x_{Ij}$.

# Вспомогательная задача

Что делать, если $\exists\, b_i < 0$?

Вводим дополнительную переменную $x_0$:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & = & b_1 + x_0 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & + & x_{n+2} & = & b_2 + x_0 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & + & x_{n+m} & = & b_m + x_0
\end{array}
$$

$$x_1,\, x_2,\, \ldots\, x_n,\, x_{n+1},\, \ldots\, x_{n+m}, x_0 \geq 0$$

$$-x_0 \to \max$$

1. Вспомогательная задача всегда совместна
2. $\max = 0 \iff$ исходная задача совместна.

# Dictionary вспомогательной задачи

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_{B1} & = & b_1 & + & x_0 & + & a_{11}x_{I1} & + & \ldots & + & a_{1n}x_{In} \\
x_{B2} & = & b_2 & + & x_0 & + & a_{21}x_{I1} & + & \ldots & + & a_{2n}x_{In} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
x_{Bm} & = & b_m & + & x_0 & + & a_{m1}x_{I1} & + & \ldots & + & a_{mn}x_{In} \\
\hline
z & = & 0 & + & -x_0 & & & & & &
\end{array}
$$

Делаем pivot ($x_0$ – entering), *уменьшая* значение целевой функции

$$b_k = \min(b_1, \ldots, b_m)$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_{Ij} & = & \frac{b_k}{-a_{kj}} & + & \frac{a_{k1}}{-a_{kj}}x_{Ik} & + \ldots + & \frac{-1}{-a_{kj}}x_{Bk} & + \ldots + & \frac{a_{kn}}{-a_{kj}}x_{In} \\
x_0 & = & \frac{b_k}{-1} & + & \frac{a_{k1}}{-1}x_{Ik} & + \ldots + & \frac{-1}{-a_{kj}}x_k & + \ldots + & \frac{a_{kn}}{-a_{kj}}x_{In}
\end{array}
$$

# Выбор entering переменной

1. Выбираем первую переменную $x_j$ с $c_j > 0$ (Bland's rule)
2. Выбираем переменную $x_j$ с максмальным $c_j$ (Dantzig's rule)
3. Жадная эвристика: выбираем $j$ дающую максимальное увеличение целевой функции

Может ли симплекс-метод зациклиться?

Да, в случае вырожденной задачи.

Правило Блэнда гарантирует, что зацикливания не будет.

# Сложность симплекс-метода

Pivot выполняется за $O(nm)$

Утв. Dictionary восстанавливается однозначно по базисным переменнным

Следствие. Количество разных dictionary

$$\leq \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

# Пример Klee-Minty

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
20x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 100 \\
200x_1 & + & 20x_2 & + & x_3 & & & \leq & 100^2 \\
2000x_1 & + & 200x_2 & + & 20x_3 & + & x_4 & \leq & 100^3
\end{array}
$$

$$\ldots$$

$$2\left(\sum_{i=1}^{k-1} 10^{k-i} x_i\right) + x_k \leq 10^{k-1}$$

$$\ldots$$

$$x_1,\, x_2,\, \ldots x_n \geq 0$$

$$10^{n-1}x_1 + 10^{n-2}x_2 + \ldots + 10x_{n-1} + x_n \to \max$$

Искаженный куб. Симплекс метод с правилом Данцига проходит по всем $2^n$ вершинам.