Адрианов Н.М.
Иванов А.Б.

Алгоритмы и структуры данных

Целочисленное линейное программирование

Стандартная форма задачи ЛП

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array}$$

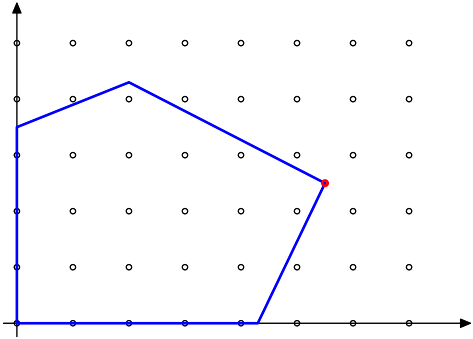
$$x_1,\, x_2,\, \ldots x_n \geq 0$$

$$x_1,\, x_2,\, \ldots x_n \in \mathbb{Z}$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

Целочисленное линейное программирование, ЦЛП
(Integer Linear Programming, ILP)

Геометрический смысл



- допустимые решения ЦЛП $\subset$ допустимые решения ЛП
- max значение ЦЛП $\leq$ max значение ЛП
- насколько могут отличаться max значения?

Связь между задачами ЦЛП и ЛП

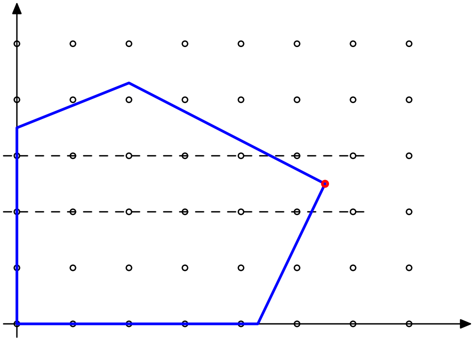
ЛП \ ЦЛП	Несовместна	Неограничена	Разрешима
Несовместна	+	-	-
Неограничена	+	+	+*
Разрешима	+	-	+

* – возможно, если коэффициенты иррациональны

Как получить из решения ЛП решение ЦЛП?
Можно ли округлить x_i?

Метод ветвей и границ

Пусть x^* – решение задачи ЛП, выберем $x_i^* \notin \mathbb{Z}$



Рассмотрим две новые задачи, добавив ограничения

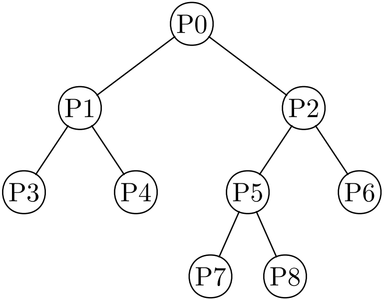
1. $x_i \leq [x_i^*]$ 2. $x_i \geq [x_i^*] + 1$

Решение исходной задачи = лучшее из решений новых задач

Метод ветвей и границ

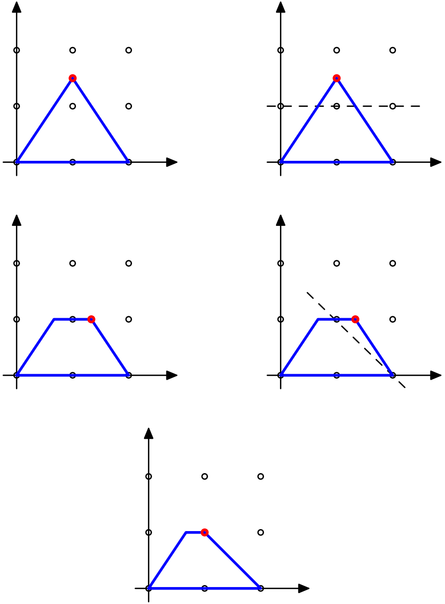
Ветвление строит дерево задач

1. В начале: $best = -\infty$
2. При нахождении листа с целевым значением z $best = \max(best, z)$



- Обязательно ли надо обойти все дерево?
- Как выбирать очередной узел для ветвления?
- Как выбирать переменную для ветвления?

Метод отсечений



Метод отсечений (метод Гомори)

1. Предполагая, что коэффициенты исходной задачи рациональны, домножим неравенства так, чтобы сделать их целыми.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & + & \color{red}{x_{n+1}} & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & + & \color{red}{x_{n+2}} & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & + & \color{red}{x_{n+m}} & = & b_m
\end{array}
$$

Тогда дополнительные переменные также будут целыми!

Метод отсечений (метод Гомори)

1. Решаем задачу ЛП:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_{B1} & = & b_1 & + & a_{11}x_{I1} & + & a_{12}x_{I2} & + & \ldots & + & a_{1n}x_{In} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
x_{Bk} & = & b_k & + & a_{k1}x_{I1} & + & a_{k2}x_{I2} & + & \ldots & + & a_{kn}x_{In} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
x_{Bm} & = & b_m & + & a_{m1}x_{I1} & + & a_{m2}x_{I2} & + & \ldots & + & a_{mn}x_{In} \\
\hline
z & = & c_0 & + & c_1x_{I1} & + & c_2x_{I2} & + & \ldots & + & c_nx_{In}
\end{array}
$$

Выбираем $b_k \notin \mathbb{Z}$, переносим все переменные в левую часть

$$x_{Bk} + \sum -a_{ki}x_{Ii} = b_k$$

$$(x_{Bk} + \sum[-a_{ki}]x_{Ii}) + (\sum\{-a_{ki}\}x_{Ii}) = b_k$$

Метод отсечений (метод Гомори)

$$x_{Bk} + \sum -a_{ki} x_{Ii} = b_k$$

$$\left(x_{Bk} + \sum [-a_{ki}] x_{Ii}\right) + \left(\sum \{-a_{ki}\} x_{Ii}\right) = [b_k] + \{b_k\}$$

Добавляем условие (секущая плоскость):

$$\sum \{-a_{ki}\} x_{Ii} \geq \{b_k\}$$

$$x_1 + 3.1x_2 - 4.3x_3 + 0.5x_5 = 1.2$$

$$(x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 0x_5) + (0.1x_2 + 0.7x_3 + 0.5x_5) = 1 + 0.2$$

$$0.1x_2 + 0.7x_3 + 0.5x_5 \geq 0.2$$

Судоку

		7	8	5		2		
		5			3	7		
8	9				4		3	5
	3	9	5		6			1
4								6
6			7		8	4	9	
1	2		3				5	4
		4	1			3		
		3		8	9	6		

Пример в GLPK: `glpsol.exe -m sudoku.mod`

`http://www.gnu.org/software/glpk/`

Сведение к задаче целочисленного ЛП

```
param givens{1..9, 1..9}, integer, >= 0, <= 9, default 0;
/* the "givens" */

var x{i in 1..9, j in 1..9, k in 1..9}, binary;
/* x[i,j,k] = 1 means cell [i,j] is assigned number k */

s.t. fa{i in 1..9, j in 1..9, k in 1..9: givens[i,j] != 0}:
     x[i,j,k] = (if givens[i,j] = k then 1 else 0);
/* assign pre-defined numbers using the "givens" */

s.t. fb{i in 1..9, j in 1..9}: sum{k in 1..9} x[i,j,k] = 1;
/* each cell must be assigned exactly one number */

s.t. fc{i in 1..9, k in 1..9}: sum{j in 1..9} x[i,j,k] = 1;
/* cells in the same row must be assigned distinct numbers */

s.t. fd{j in 1..9, k in 1..9}: sum{i in 1..9} x[i,j,k] = 1;
/* cells in the same column must be assigned distinct numbers */

s.t. fe{I in 1..9 by 3, J in 1..9 by 3, k in 1..9}:
     sum{i in I..I+2, j in J..J+2} x[i,j,k] = 1;
/* cells in the same region must be assigned distinct numbers */
```

Минимальное вершинное покрытие

Дано: граф $G = (V, E)$
Найти: множество $S \subset V$ минимального размера такое, что

$$\forall (u, v) \in E: \; u \in S \text{ или } v \in S$$

Минимальное покрытие – сведение к ЦЛП

$V = \{1, 2, \dots n\}$
Введем переменные $x_1, x_2, \dots x_n$, $x_i \in \{0, 1\}$.

Задача ЦЛП:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \to \min$$

$$0 \le x_i \le 1,\ i \in V$$

$$x_i + x_j \ge 1,\ (i, j) \in E$$

$$x_i \in \mathbb{Z}$$

Решаем задачу ЛП, получаем оптимальное решение x^*, округляем

$$\hat{x}_i = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i^* < 1/2 \\ 1, & \text{если } x_i^* \ge 1/2 \end{cases}$$

Минимальное покрытие – сведение к ЦЛП

Будет ли округленное решение задачи ЛП решением ЦЛП?

$$x_i^* + x_j^* \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{x}_i = 1 \text{ или } \hat{x}_j = 1$$

Насколько полученное решение $\hat{x}$ может быть хуже оптимального решения ЦЛП?

$$2\sum_{i=1}^{n} x_i^* \geq \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i$$