
АДРИАНОВ Н.М.
ИВАНОВ А.Б.

АЛГОРИТМЫ И СТРУКТУРЫ ДАННЫХ

РАЗДЕЛЯЙ И ВЛАСТВУЙ

РАЗДЕЛЯЙ И ВЛАВСТВУЙ: ОСНОВНОЙ МЕТОД*

Теорема. Если сложность алгоритма определяется рекуррентным соотношением

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d),$$

то

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d \log n), & \text{если } a = b^d \\ O(n^d), & \text{если } a < b^d \\ O(n^{\log_b a}), & \text{если } a > b^d. \end{cases}$$

СОРТИРОВКА СЛИЯНИЕМ (MERGE SORT)

«РАЗДЕЛЯЙ И ВЛАСТВУЙ» (DIVIDE AND CONQUER)

- Разделим массив на 2 части размера $n/2$
- Отсортируем обе части (2 рекурсивных вызова)
- Выполним процедуру слияния: объединяем отсортированные части таким образом, чтобы получить полностью отсортированный массив

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$T(n) = O(n \log n)$$

«ДЛИННАЯ» АРИФМЕТИКА

- ▶ Как хранить «длинные» целые?
- ▶ Сложение
- ▶ Умножение
- ▶ Деление

«ДЛИННАЯ» АРИФМЕТИКА

- ▶ Как хранить «длинные» целые?

Массив «цифр» в d -ичной системе счисления.

Эффективные реализации используют $d = 2^m$.

- ▶ Сложение

Школьный алгоритм сложения «столбиком».

Сложность $O(n)$.

- ▶ Умножение

Школьный алгоритм умножения «столбиком».

Сложность $O(n^2)$.

- ▶ Деление

Алгоритм деления «уголком» включает в себя нетривиальный шаг:

угадывание цифры. См. Кнут «Искусство программирования», т. 2.

УМНОЖЕНИЕ: «РАЗДЕЛЯЙ И ВЛАСТВУЙ»

$$(Ax^m + B)(Cx^m + D) = ACx^{2m} + (AD + BC)x^m + BD$$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$T(n) = O(n^2)$$

АЛГОРИТМ КАРАЦУБЫ (1960)

$$\begin{aligned}(Ax^m + B)(Cx^m + D) &= ACx^{2m} + (AD + BC)x^m + BD = \\ &= ACx^{2m} + ((A + B)(C + D) - AC - BD)x^m + BD\end{aligned}$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$T(n) = O(n^{\log_2 3})$$

$$\log_2 3 = 1.58496 \dots$$

АЛГОРИТМЫ УМНОЖЕНИЯ ДЛИННЫХ ЧИСЕЛ

1960	Карацуба	$O(n^{1.58})$
1963	Toom, Cook	$O(n^{1.46})$
1971	Schönhage, Strassen	$O(n \log n \cdot \log \log n)$
2007	Fürer	$O(n \log n \cdot 2^{O(\log^* n)})$
2008	De, Kurur, Saha and Saptharishi	$O(n \log n \cdot 2^{O(\log^* n)})$
2015	Harvey, Hoeven, Lecerf	$O(n \log n \cdot 2^{3 \cdot \log^* n})$
2015	Covanov, Thomé	$O(n \log n \cdot 2^{2 \cdot \log^* n})$
2019	Harvey, van der Hoeven	$O(n \log n)$

Schönhage–Strassen используется для чисел с 10000+ десятичными знаками.

Дальнейшие улучшения не имеют практических применений.

Fürer использует комплексные числа. DKSS использует модулярную арифметику.

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

$$X = (x_{ij}) \quad Y = (y_{ij}) \quad XY = (z_{ij})$$

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik}y_{kj}$$

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

$$X = (x_{ij}) \quad Y = (y_{ij}) \quad XY = (z_{ij})$$

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik}y_{kj}$$

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

$$XY = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2)$$

АЛГОРИТМ ШТРАССЕНА (1969)

$$XY = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

$$XY = \begin{pmatrix} P_5 + P_4 - P_2 + P_6 & P_1 + P_2 \\ P_3 + P_4 & P_1 + P_5 - P_3 - P_7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= A(F - H) & P_2 &= (A + B)H \\ P_3 &= (C + D)E & P_4 &= D(G - E) \\ P_5 &= (A + D)(E + H) & P_6 &= (B - D)(G + H) \\ P_7 &= (A - C)(E + F) \end{aligned}$$

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2)$$

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

1969	Strassen	$O(n^{2.808})$ $\log_2 7 = 2.80735 \dots$
1978	Pan	$O(n^{2.796})$
1979	Bini, et al.	$O(n^{2.78})$
1981	Shönhage	$O(n^{2.522})$
1982	Romani	$O(n^{2.517})$
1981	Coppersmith-Winograd	$O(n^{2.496})$
1986	Strassen	$O(n^{2.479})$
1989	Coppersmith-Winograd	$O(n^{2.376})$
2010	Stothers	$O(n^{2.3737})$
2012	Williams	$O(n^{2.3729})$

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

2014	Le Gall	$O(n^{2.3728639})$
2020	Alman, Williams	$O(n^{2.3728596})$
2022	Duan, Wu, Zhou	$O(n^{2.371866})$
2023	Williams, Xu, Xu, and Zhou	$O(n^{2.371552})$

DEERMIND: ALPHATENSOR (ОКТЯБРЬ 2022)

<https://www.nature.com/articles/s41586-022-05172-4>

Strassen, 1969: 7 умножений для 2×2 :

$$\log_2 7 = 2.80735 \dots$$

AlphaTensor, 2022: 47 умножений для 4×4 (но над \mathbb{Z}_2 !):

$$\log_4 47 = 2.77729 \dots$$

DEERMIND: ALPHATENSOR (ОКТЯБРЬ 2022)

<https://www.nature.com/articles/s41586-022-05172-4>

Strassen, 1969: 7 умножений для 2×2 :

$$\log_2 7 = 2.80735 \dots$$

AlphaTensor, 2022: 47 умножений для 4×4 (но над $\mathbb{Z}_2!$):

$$\log_4 47 = 2.77729 \dots$$

$\mathcal{T}_{n,m,p}$ – задача умножения матриц $(n, m) \times (m, p)$.

(m, n, p)	Было	Найдено	Рецепт	Показатель
$(3, 4, 5)$	48	47		
$(3, 4, 11)$	104	103	$(3, 4, 5) + (3, 4, 6)$	
$(4, 4, 5)$	64	63		
$(4, 5, 5)$	80	76		
$(9, 9, 9)$	511	498	$6(3, 3, 3) + 9(6, 3, 3)$	2.82656...
$(10, 10, 10)$	686	682	$5(5, 3, 3) + 4(5, 3, 4) + \dots$	2.83378...
$(11, 11, 11)$	511	498	$(5, 2, 2) + 3(5, 2, 3) + \dots$	2.83496...

УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

$$\begin{aligned}A(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \\B(x) &= b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n \\C(x) = A(x) \cdot B(x) &= c_0 + c_1x + \dots + c_{2n}x^{2n}\end{aligned}$$

"Наивный" алгоритм:

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$$

Сложность $O(n^2)$

ИДЕЯ 1: ЗАДАТЬ МНОГОЧЛЕН ЗНАЧЕНИЯМИ

$$x_0, x_1, \dots, x_{2n} : x_i \neq x_j, i \neq j$$

Тогда:

$$C(x_i) = A(x_i) \cdot B(x_i), i = 0 \dots 2n$$

$$\begin{pmatrix} A(x_0) \\ A(x_1) \\ \vdots \\ A(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ & \vdots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

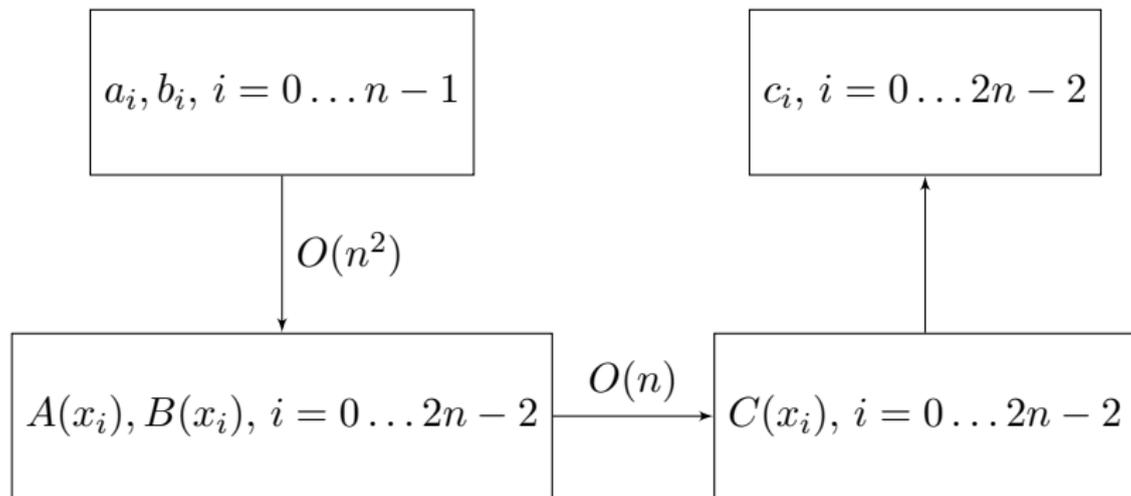
ИДЕЯ 1: ЗАДАТЬ МНОГОЧЛЕН ЗНАЧЕНИЯМИ

Вычисляем по схеме Горнера:

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots x(a_{n-1} + a_n x) \dots)).$$

Сложность вычисления во всех x_0, x_1, \dots, x_{2n} : $O(n^2)$

ИДЕЯ 1: ЗАДАТЬ МНОГОЧЛЕН ЗНАЧЕНИЯМИ



ИДЕЯ 2: КАК ПОСЧИТАТЬ $A(x_i)$ БЫСТРЕЕ?

Возьмем $2n + 2$ точки

$$\pm x_0, \pm x_1, \dots, \pm x_{\frac{n}{2}}$$

и

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_{2k-1}x^{2k-1} \\ &= (a_0 + a_2x^2 + \dots + a_{2k-2}x^{2k-2}) + x \cdot (a_1 + a_3x^2 + \dots + a_{2k-1}x^{2k-2}) \\ &= A_0(x^2) + xA_1(x^2) \end{aligned}$$

Свели задачу к двум многочленам степени $k - 1$ - намек на разделяй и властвуй.

ИДЕЯ 3: КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

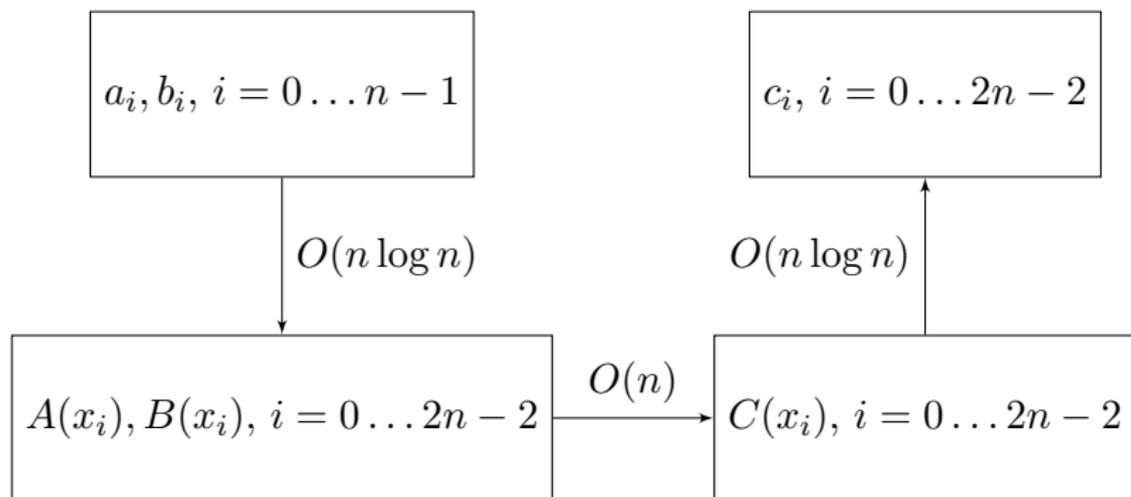
Возьмем наименьшее k такое, что $2n + 1 \leq 2^k = m$ и $\omega = e^{\frac{2\pi i}{m}}$

$$\begin{pmatrix} A(1) \\ A(\omega) \\ \vdots \\ A(\omega^j) \\ \vdots \\ A(\omega^{m-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^n \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2 \cdot n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \omega^j & \omega^{2j} & \dots & \omega^{j \cdot n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \omega^{m-1} & \omega^{2(m-1)} & \dots & \omega^{(m-1) \cdot n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$y = V_{nm}(\omega)a, \quad a = \frac{1}{n}V_{mn}(\omega^{-1})y$$

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ (FFT)

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$



ПОИСК ПАРЫ БЛИЖАЙШИХ ТОЧЕК

Дано: n точек на плоскости $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$.

Найти: пару точек с минимальным расстоянием между ними.

Разделяй и властвуй:

1. Отсортировать по x -координате.
2. Разделить на 2 части ($x < x^*$ и $x > x^*$).
3. Найти пару ближайших точек в каждой из частей.
4. Как найти пару ближайших точек в их объединении?