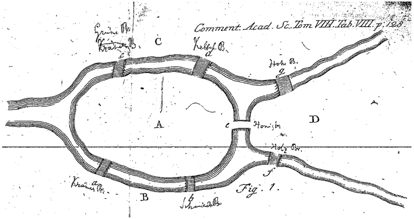
Адрианов Н.М.
Иванов А.Б.

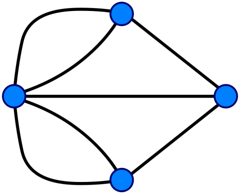
Алгоритмы и структуры данных

Графы

Задача о Кёнигсбергских мостах

Эйлер (1736)





Основные определения

Граф (V, E) V – множество вершин
E – множество ребер

Ориентированный: $E = \left\{(u, v) \,|\, u, v \in V\right\}$
Неориентированный: $E = \left\{(u, v) \,|\, u, v \in V\right\} / \sim$ $(u, v) \sim (v, u)$

Степень вершины
Ориентированный: $d_{out}(v)$, $d_{in}(v)$

$$\sum_{v \in V} d_{out}(v) = \sum_{v \in V} d_{in}(v) = |E|$$

Неориентированный: $d(v)$

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Приложения: графы везде

- Веб-граф
- Графы социальных сетей
- Компьютерные и электросети
- Дорожная сеть
- Управление проектами
- ...

Пути и связность

Путь от вершины u к вершине v: $e_1, e_2, \ldots e_k \in E$

$$e_i = (u_{i-1}, u_i), \quad u_0 = u, \quad u_k = v$$

Цикл: путь, в котором начало и конец совпадает

Связный граф: для любых $u, v \in V$ $\exists$ путь от u к v

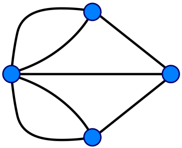
Компонента связности: максимальное $C \subset V$ такое, что
для любых $u, v \in C$ $\exists$ путь от u к v

Дерево: связный неориентированный граф без циклов

Задача о Кёнигсбергских мостах

Эйлеров путь: путь без повторяющихся ребер

Существует ли эйлеров путь?



Эйлеров путь существует $\Leftrightarrow$
в графе не более 2 вершин нечетной степени

Гамильтонов путь: путь без повторяющихся вершин

Существует ли гамильтонов путь?

NP-полная задача

Когда граф можно уложить на плоскость?

Теорема Куратовского, 1930:
Граф является планарным тогда и только тогда, когда в нем нет топологических миноров, изоморфных K_5 или $K_{3,\,3}$.

Граф H является топологическим минором G если существует гомеоморфное вложение H в G, т.е. существует подграф H' в G такой, что H' получается из H подразделением ребер.

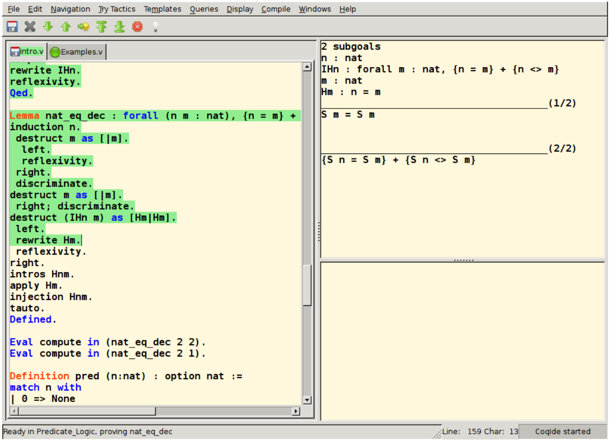
Алгоритм: гамма-алгоритм

Проблема 4 красок

Сколько красок необходимо, чтобы раскрасить плоскую карту так, чтобы граничащие страны имели разный цвет?

- 5 красок достаточно: Heawood, 1890
- 4 краски: Appel, Haken, 1976
  - любой контрпример содержит минимальный
  - 1936 карт, которые могли бы быть минимальными контрпримерами
  - сотни страниц доказательства + программа
- более простое доказательство (также с использованием компьютера): Robertson, Sanders, Seymour, Thomas, 1997
- формализованное доказательство в системе Coq: Gonthier, 2005

Система Coq: interactive theorem prover



Gonthier + team, 2012: теорема Фейта-Томпсона (1962)

Не существует простых неабелевых групп нечетного порядка