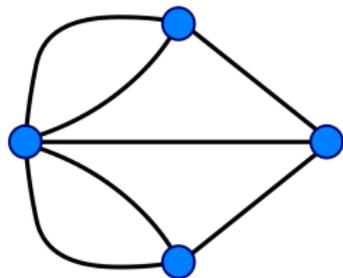
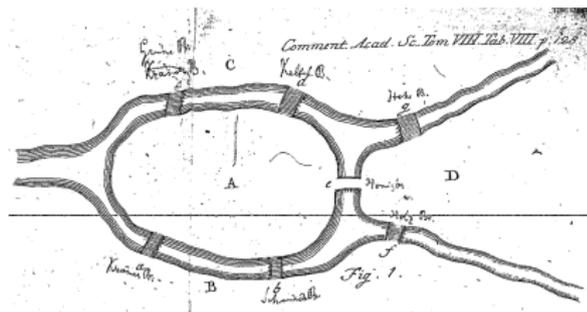

АДРИАНОВ Н.М.
ИВАНОВ А.Б.

АЛГОРИТМЫ И СТРУКТУРЫ ДАННЫХ

ГРАФЫ

Задача о Кёнигсбергских мостах

Эйлер (1736)



ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Граф (V, E)

V – множество вершин

E – множество ребер

Ориентированный:

$$E = \{(u, v) \mid u, v \in V\}$$

Неориентированный:

$$E = \{(u, v) \mid u, v \in V\} / \sim \quad (u, v) \sim (v, u)$$

Степень вершины

Ориентированный:

$$d_{out}(v), d_{in}(v)$$

$$\sum_{v \in V} d_{out}(v) = \sum_{v \in V} d_{in}(v) = |E|$$

Неориентированный:

$$d(v)$$

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

ПРИЛОЖЕНИЯ: ГРАФЫ ВЕЗДЕ

- Веб-граф
- Графы социальных сетей
- Компьютерные и электросети
- Дорожная сеть
- Управление проектами
- ...

ПУТИ И СВЯЗНОСТЬ

Путь от вершины u к вершине v : $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$

$$e_i = (u_{i-1}, u_i), \quad u_0 = u, \quad u_k = v$$

Цикл: путь, в котором начало и конец совпадает

Связный граф: для любых $u, v \in V \exists$ путь от u к v

Компонента связности: максимальное $C \subset V$ такое, что для любых $u, v \in C \exists$ путь от u к v

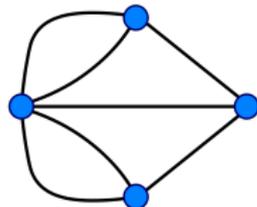
Дерево: связный неориентированный граф без циклов

ЗАДАЧА О КЁНИГСБЕРГСКИХ МОСТАХ

Эйлеров путь: путь без повторяющихся ребер

Существует ли эйлеров путь?

Эйлеров путь существует \Leftrightarrow
в графе не более 2 вершин нечетной степени



Гамильтонов путь: путь без повторяющихся вершин

Существует ли гамильтонов путь?

NP-полная задача

КОГДА ГРАФ МОЖНО УЛОЖИТЬ НА ПЛОСКОСТЬ?

Теорема Куратовского, 1930:

Граф является планарным тогда и только тогда, когда в нем нет топологических миноров, изоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

Граф H является топологическим минором G если существует гомеоморфное вложение H в G , т.е. существует подграф H' в G такой, что H' получается из H подразделением ребер.

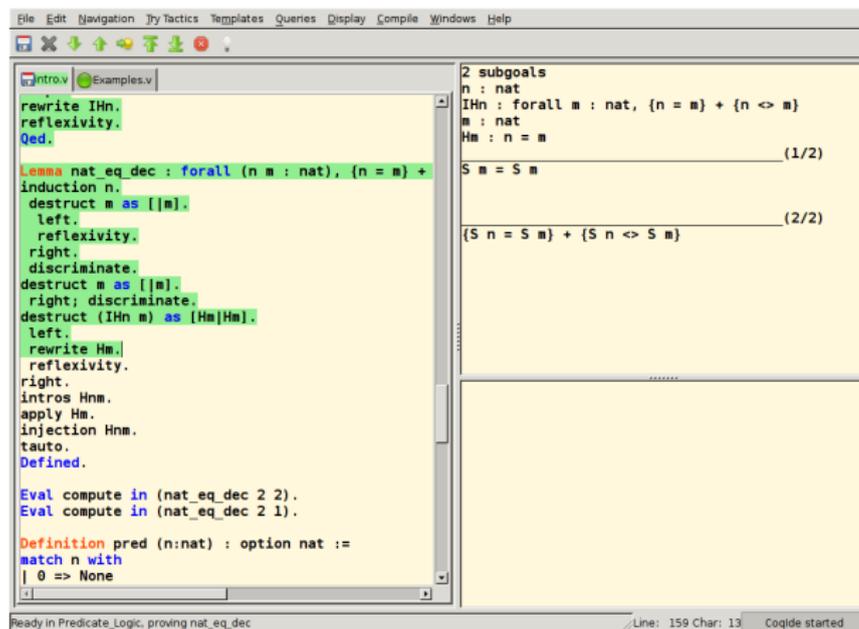
Алгоритм: гамма-алгоритм

ПРОБЛЕМА 4 КРАСОК

Сколько красок необходимо, чтобы раскрасить плоскую карту так, чтобы граничащие страны имели разный цвет?

- 5 красок достаточно: Heawood, 1890
- 4 краски: Appel, Haken, 1976
 - любой контрпример содержит минимальный
 - 1936 карт, которые могли бы быть минимальными контрпримерами
 - сотни страниц доказательства + программа
- более простое доказательство (также с использованием компьютера): Robertson, Sanders, Seymour, Thomas, 1997
- формализованное доказательство в системе Coq: Gonthier, 2005

СИСТЕМА COQ: INTERACTIVE THEOREM PROVER



```
File Edit Navigation Jvy Tactics Templates Queries Display Compile Windows Help
intro.v Examples.v
rewrite IHn.
reflexivity.
Qed.

Lemma nat_eq_dec : forall (n m : nat), (n = m) +
induction n.
destruct m as [|m].
left.
reflexivity.
right.
discriminate.
destruct m as [|m].
right; discriminate.
destruct (IHn m) as [Hm|Hm].
left.
rewrite Hm.
reflexivity.
right.
intros Hm.
apply Hm.
injection Hm.
tauto.
Defined.

Eval compute in (nat_eq_dec 2 2).
Eval compute in (nat_eq_dec 2 1).

Definition pred (n:nat) : option nat :=
match n with
| 0 => None
```

2 subgoals
n : nat
IHn : forall m : nat, (n = m) + (n <> m)
m : nat
Hm : n = m
----- (1/2)
S m = S m

----- (2/2)
(S n = S m) + (S n <> S m)

Ready in Predicate_Logic, proving nat_eq_dec Line: 159 Char: 13 Coqide started

Gonthier + team, 2012: теорема Фейта-Томпсона (1962)

Не существует простых неабелевых групп нечетного порядка