Адрианов Н.М.
Иванов А.Б.

Алгоритмы и структуры данных

Графы. Кратчайшие пути. Максимальное паросочетание. Потоки в сетях

Кратчайшие пути из одной вершины

Дано:

- ориентированный граф $G = (V, E)$;
- у ребер заданы длины $l : E \to \mathbb{R}$;
- стартовая вершина s.

Требуется: найти расстояния от s до v для всех вершин $v \in V$.

Алгоритм Дейкстры решает эту задачу, но только если длины ребер неотрицательны.

Алгоритм Дейкстры использует очередь с приоритетами. Его сложность зависит от структуры данных, с помощью которой реализуют очередь. При использовании бинарной кучи – сложность $O(E \log V)$.

Циклы отрицательной длины

Если в графе существуют ребра отрицательной длины, то могут быть циклы отрицательной длины.

Если из вершины s можно добраться до цикла отрицательной длины, то задача поиска кратчайших путей из s не имеет решения.

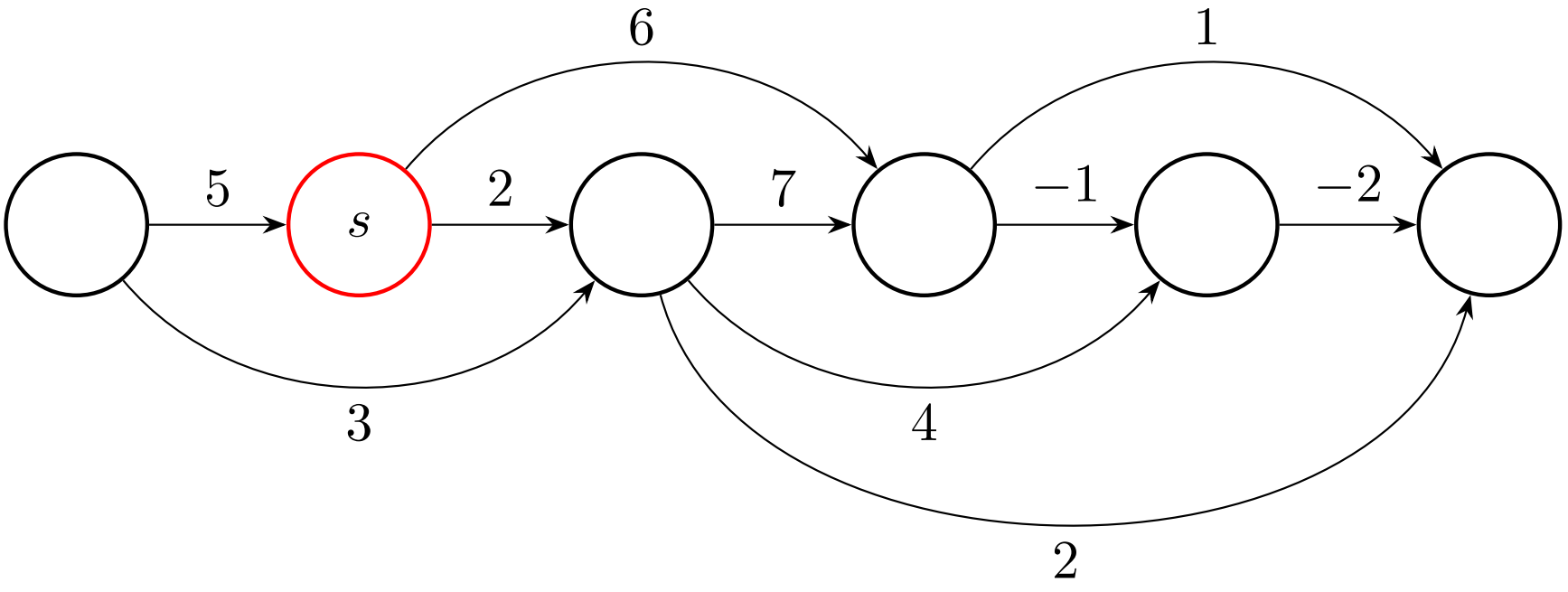
Нужен алгоритм, который будет правильно определять кратчайшие пути, если в графе нет отрицательных циклов, а они если есть - то алгоритм должен определять это.

Ориентированный ациклический граф (DAG)

```
procedure DAGSSP( G, l, s )
  dist = массив размера V
  V = топологически отсортированные вершины G
  for v in V:
    dist[v] = +∞
  dist[s] = 0

  for u in V:
    for v in G.adj(u):
        if dist[v] > dist[u] + l[e]:
          dist[v] = dist[u] + l[e]
end
```

Ориентированный ациклический граф (DAG)



Алгоритм Беллмана-Форда

```
procedure BellmanFord( G, l, s )
  dist = массив размера V
  for v in V:
    dist[v] = +∞
  dist[s] = 0

  for i = 1,2,...|V|-1:
    for u in V:
      for v in G.adj(u):
        if dist[v] > dist[u] + l[e]:
          dist[v] = dist[u] + l[e]
end
```

Алгоритм Беллмана-Форда

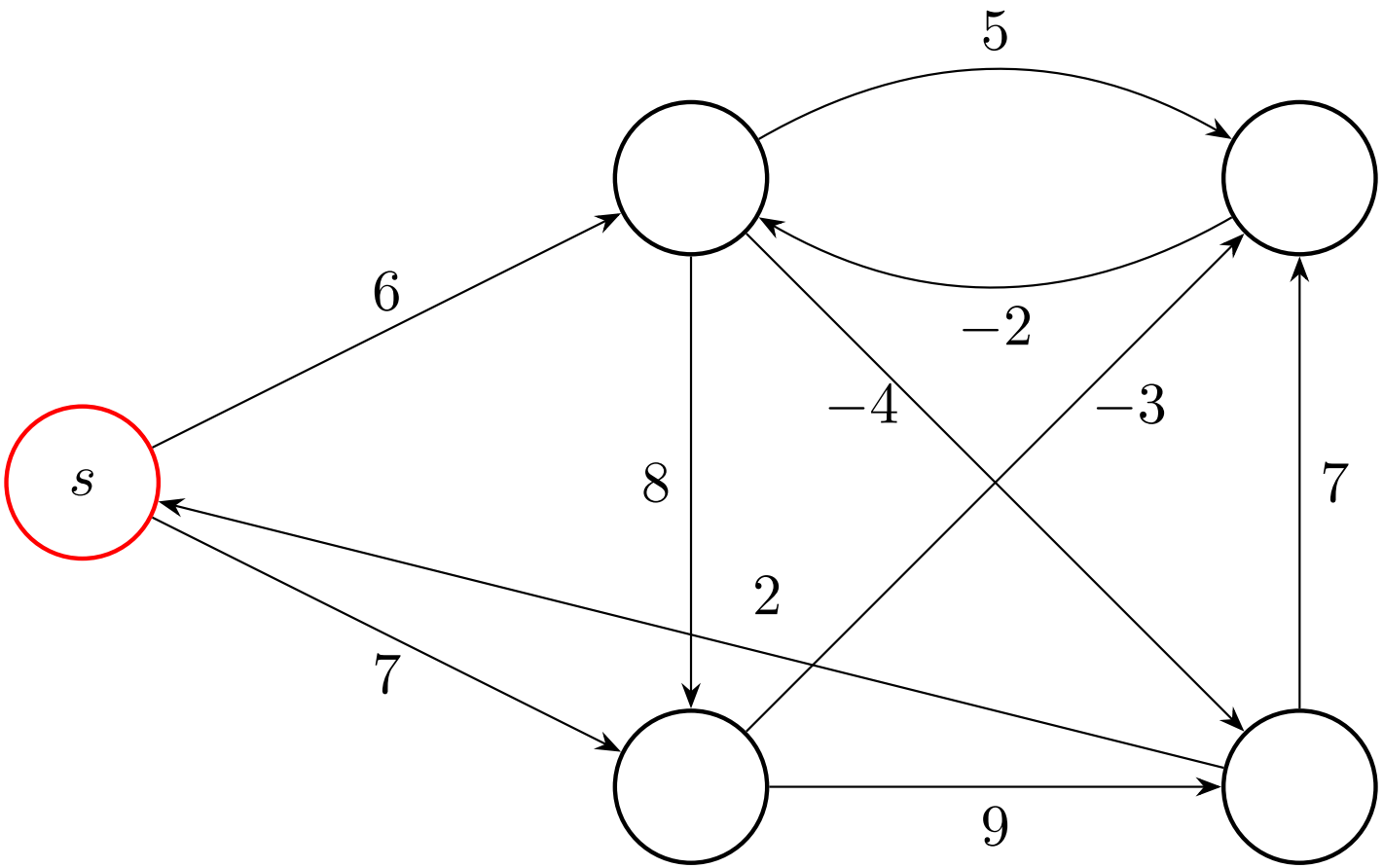
```
procedure BellmanFord( G, l, s )
  dist = массив размера V
  for v in V:
    dist[v] = +∞
  dist[s] = 0

  for i = 1,2,...|V|-1:
    for u in V:
      for v in G.adj(u):
        if dist[v] > dist[u] + l[e]:
          dist[v] = dist[u] + l[e]
end
```

Сложность $O(V \cdot E)$

- Если отрицательных циклов нет, то в кратчайшем пути вершины не могут повторяться. Значит, длина кратчайшего пути $\leq V - 1$.
- Если сделать $|V|$ итераций и на последней итерации меняется хотя бы одно расстояние – значит есть отрицательные циклы.
- Если на какой-то итерации изменений не происходит, то цикл можно прерывать.

Алгоритм Беллмана-Форда



Корректность алгоритма Беллмана-Форда

Идея: пусть в графе нет отрицательных циклов. Тогда для любой вершины v кратчайший путь
$p = (s, v_1, v_2, \ldots, v_k), \quad k < V$. Любое начало этого пути - кратчайший путь к соответствующей вершине.

Задача о самом длинном пути

Дано:

- ориентированный граф $G = (V, E)$;
- у ребер заданы длины $l : E \to \mathbb{R}$;
- стартовая вершина s.

Требуется: найти самый длинный путь от s до v для всех вершин $v \in V$.

Кратчайший простой путь

Дано:

- ориентированный граф $G = (V, E)$;
- у ребер заданы длины $l : E \to \mathbb{R}$;
- стартовая вершина s.

Требуется: найти кратчайший простой путь от s до v для всех вершин $v \in V$.

Все кратчайшие пути

Дано:

- ориентированный граф $G = (V, E)$;
- у ребер заданы длины $l : E \to \mathbb{R}$.

Требуется: найти расстояния от u до v для всех вершин $u, v \in V$.

Все кратчайшие пути

Алгоритм Дейкстры из каждой вершины: $O(VE \log V)$

- $O(V^2 \log V)$, если граф разреженный: $E = O(V)$;
- $O(V^3 \log V)$, если граф плотный: $E = O(V^2)$.

Алгоритм Форда-Беллмана из каждой вершины: $O(V^2 E)$

- $O(V^3)$, если граф разреженный: $E = O(V)$;
- $O(V^4)$, если граф плотный: $E = O(V^2)$.

Алгоритм Флойда – дальше.

Алгоритм Флойда

Пронумеруем вершины $V = \{1, 2, ...n\}$.

Динамика: ищем пути из i в j так, что в по пути проходим только через вершины с номерами не больше k.

```
procedure Floyd( G, l )
  A = 3-мерный массив (реально нужен только 2-мерный)
  for i = 1, ... n
    for j = 1, ... n
      A[i, j, 0] =
        0,          если i = j
        l[i,j],     если (i, j) ∈ E
        +∞          иначе

  for k = 1, ... n
    for i = 1, ... n
      for j = 1, ... n
        A[i, j, k] = min(A[i, j, k - 1], A[i, k, k - 1] + A[k, j, k - 1])
end
```

Алгоритм Флойда

Q: Как определить наличие отрицательного цикла?

A: В конце работы алгоритма `A[i,i,n] < 0` для некоторого `i`.

Q: Как восстановить кратчайший путь?

A: Дополнительно для каждой пары (i, j) надо хранить максимальный индекс вершины, входящей в кратчайший путь от i до j.

Избавление от отрицательных длин ребер

Цель: избавиться от отрицательных ребер, чтобы можно было воспользоваться алгоритмом Дейкстры для решения задачи нахождения всех кратчайших путей.

1. Добавим новую вершину s и соединим ее со всеми вершинами графа G ребрами веса 0.
2. Запустим алгоритм Беллмана-Форда для вершины s и определим $p_u =$ кратчайшее расстояние от s до u.
3. Зададим новую длину ребер: $l'(u, v) = l(u, v) + p_u - p_v$.

$$p_v \leq p_u + l(u, v) \quad \Rightarrow \quad l'(u, v) \geq 0$$

Для любого пути из s в t новая длина пути отличается на $p_s - p_t$.