Адрианов Н.М.
Иванов А.Б.

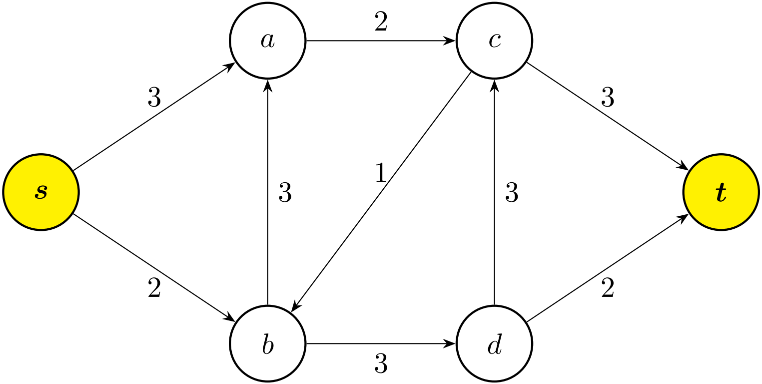
Алгоритмы и структуры данных

Потоки в сетях

Транспортная сеть

- ориентированный граф $G = (V, E)$
- заданы емкости $c : V \times V \to \mathbb{R}_+$
- $c(u, v) = 0$, если $(u, v) \notin V$
- вершина-исток $\boldsymbol{s}$ и вершина-сток $\boldsymbol{t}$

Пример транспортной сети



Задача о максимальном потоке

Потоком называется функция $f : V \times V \to \mathbb{R}_+$ такая, что

- $f(u, v) \leq c(u, v)$ для всех $u, v \in V$
- $f(u, v) = -f(v, u)$
- для любой вершины $u \in V \setminus \{s, t\}$ выполнено

$$\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$$

$$(\implies \sum_{(\cdot, u) \in E} f(\cdot, u) = \sum_{(u, \cdot) \in E} f(u, \cdot))$$

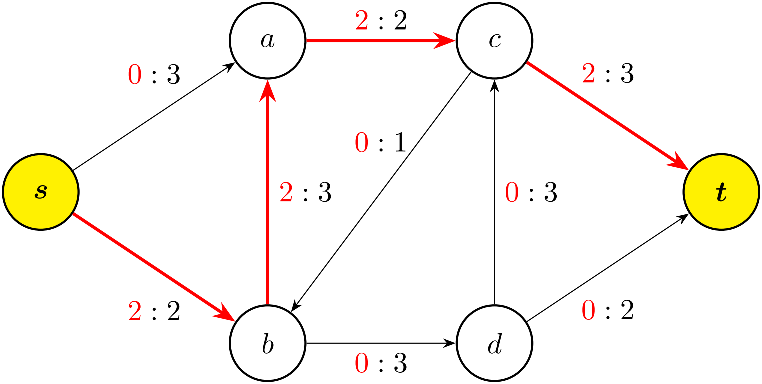
Величиной потока называется

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) = f(s, V)$$

Свойства потока

- $f(X, X) = 0$
- $f(X, Y) = -f(Y, X)$
- $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$, если $X \cap Y = \varnothing$
- $|f| = f(V, t) = \sum_{v \in V} f(v, t)$

Пример потока



$$|f| = 2$$

Задача о максимальном потоке

$$|f| = \max_{f'} |f'|$$

Остаточная сеть

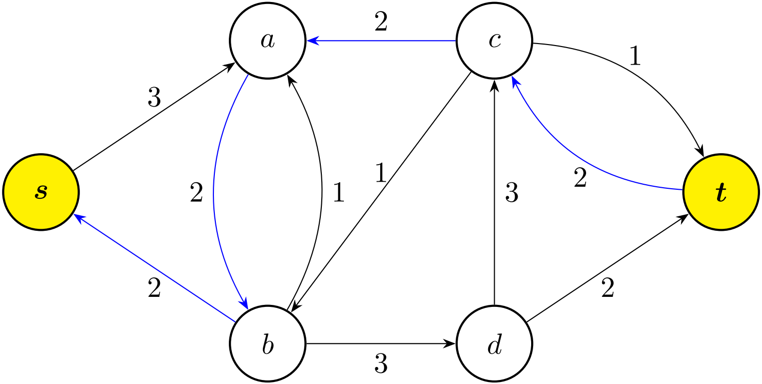
Добавим для каждого (направленного) ребра $(u, v) \in E$ обратное ребро (v, u) (если его еще не было) и зададим для него $c(v, u) = 0$.

Дана сеть $G = (V, E, c)$ и поток f.

Остаточная сеть $G_f = (V, E, c_f)$:

- для каждого ребра (u, v) зададим емкость $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$;
- добавим обратные ребра (v, u) с емкостью $f(u, v)$;
- удалим все ребра емкости 0.

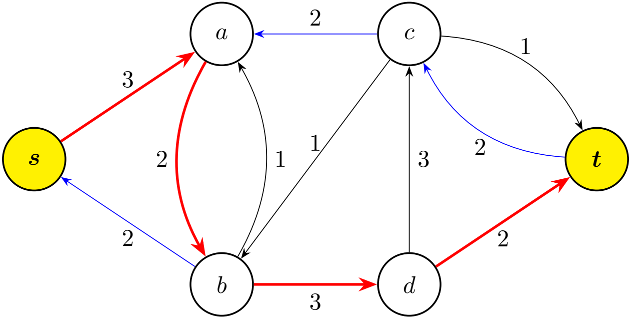
Пример остаточной сети



$$|f| = 2$$

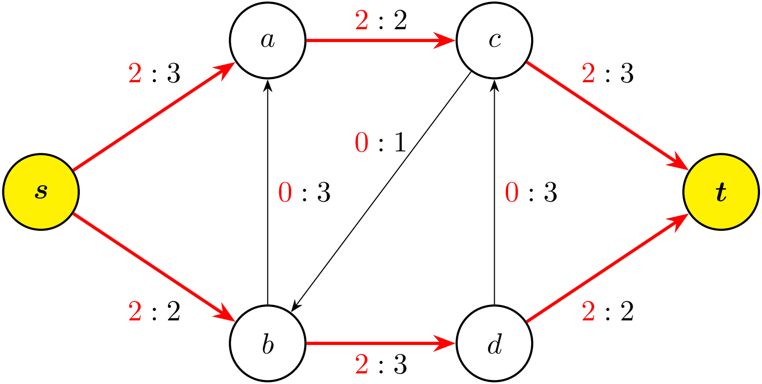
Увеличивающий путь

Увеличивающий путь - любой путь в G_f из s в t.
Мы можем увеличить поток вдоль пути p на
$c_f(p) = \min\limits_{(u,v)\in p} c_f(u,v)$



$$c_f(p) = 2$$

Новый поток



$$|f| = 4$$

Алгоритм Форда-Фалкерсона

- Положим поток $f = 0$
- Пока в остаточной сети G_f есть путь p, возьмем минимальную емкость ребра вдоль p и увеличим поток на эту величину вдоль пути p.

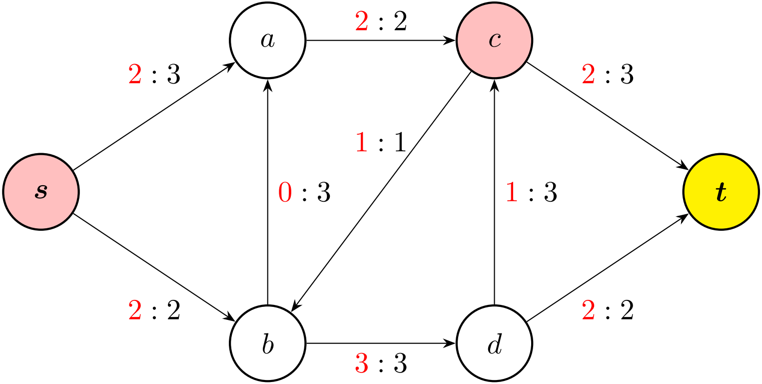
Разрез транспортной сети

Разрез (S, T): пара $S, T \subset V$, $S \cap T = \varnothing$ такая, что $s \in S$, $t \in T$

Поток через рарез (S, T) **для потока** f **в** G: $f(S, T)$

Пропускная способность (S, T): $c(S, T) = \sum\limits_{u \in S, v \in T} c(u, v)$

Разрез транспортной сети



Разрез транспортной сети

Минимальный разрез: разрез, минимизирующий $c(S, T)$

Утв: Для любого потока f в G и любого разреза (S, T)
$|f| = f(S, T)$.

Утв: Для любого потока f в G и любого разреза (S, T)
$|f| \leq c(S, T)$.

Теорема Форда-Фалкерсона

Теорема. Максимальный поток в сети равен минимальному (s, t)-разрезу.

Теорема'. Следующие условия эквивалентны:

1. Поток f максимален.
2. Остаточная сеть G_f не содержит увеличивающих путей.
3. Существует разрез (S, T), для которого $|f| = c(S, T)$

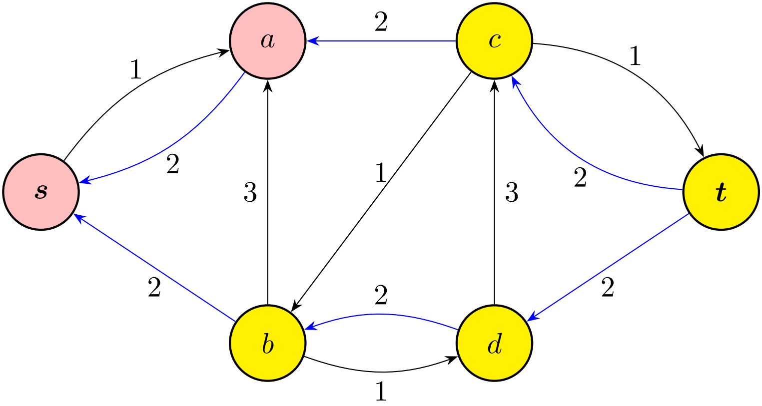
$1 \Rightarrow 2$ Если есть увеличивающий путь, то поток не максимален.

$2 \Rightarrow 3$ Если нет увеличивающего пути, то в качестве разреза $S \subset V$ возьмем все вершины, достижимые из s в G_f.

$3 \Rightarrow 1$ Величина любого потока меньше пропускной способности любого разреза.

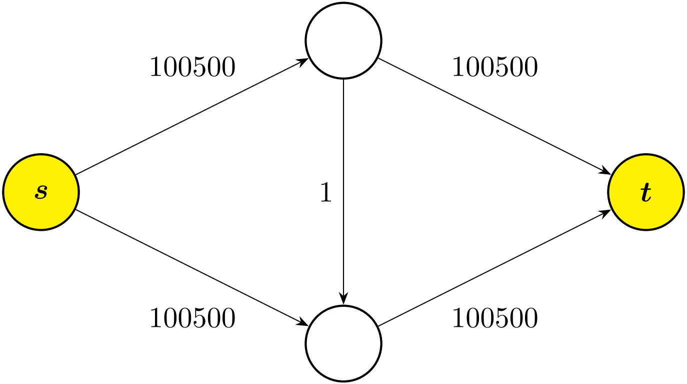
Минимальный разрез

Как найти минимальный разрез?

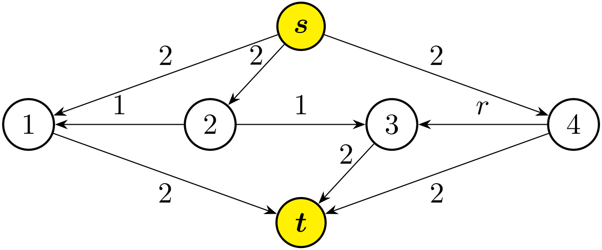


Сложность алгоритм Форда-Фалкерсона

Сложность: $O(E \cdot |f^*|)$, где f^* – максимальный поток.



Алгоритм Форда-Фалкерсона не работает



$$r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$r^2 = 1 - r$$

Путь	δ	$1 \quad \leftarrow \quad 2 \quad \rightarrow \quad 3 \quad \leftarrow \quad 4$		
$-$		1	1	r
$2-3$	1	1	0	r
$4-3-2-1$	r	$1-r$	r	0
$2-3-4$	r	r^2	0	r
$4-3-2-1$	r^2	0	r^2	$r-r^2$
$1-2-3$	r^2	r^2	0	r^3

Алгоритм Эдмондса-Карпа

В алгоритме Форда-Фалкерсона будем выбирать *кратчайший* увеличивающий путь.