
АДРИАНОВ Н.М.
ИВАНОВ А.Б.

АЛГОРИТМЫ И СТРУКТУРЫ ДАННЫХ

ПОТОКИ В СЕТЯХ

АЛГОРИТМ ЭДМОНДСА-КАРПА

В алгоритме Форда-Фалкерсона будем выбирать *кратчайший* увеличивающий путь.

АЛГОРИТМ ЭДМОНДСА-КАРПА

В алгоритме Форда-Фалкерсона будем выбирать *кратчайший* увеличивающий путь.

Сложность: $O(VE^2)$

Схема доказательства:

- Расстояние от s до любой вершины не убывает в течение работы алгоритма.
- Назовем ребро увеличивающего пути критическим, если его емкость совпадает с пропускной способностью пути.
- Одно и то же ребро может стать критическим не более $O(V)$ раз.
- Всего ребер E .
- Нахождение кратчайшего пути требует $O(E)$ времени.

АЛГОРИТМ ЭДМОНДСА-КАРПА

В алгоритме Форда-Фалкерсона получаем последовательность остаточных сетей $G = G_0, G_1, \dots, G_t, \dots$

Пусть $d_t(v) =$ расстояние (число ребер) от s до v в сети G_t .

Лемма 1. Расстояние не убывает: $d_t(v) \leq d_{t+1}(v)$.

Док-во. Предположим противное: для некоторого t есть вершины, для которых это нарушено. Выберем v – ближайшую к s такую вершину в G_{t+1} . Пусть u – предпоследняя вершина в кратчайшем пути от s к v в G_{t+1} . Тогда

$$\begin{aligned}d_t(u) &\leq d_{t+1}(u), & d_t(v) &> d_{t+1}(v), & d_{t+1}(v) &= d_{t+1}(u) + 1 \\ \Rightarrow d_t(v) &> d_{t+1}(v) = d_{t+1}(u) + 1 &&\geq d_t(u) + 1\end{aligned}$$

Следовательно, в сети G_t не было (u, v) . Откуда же он появился в сети G_{t+1} ? Значит, в увеличивающем пути p_t было ребро (v, u) . Но увеличивающий путь – кратчайший, значит, $d_t(v) = d_t(u) + 1$, а мы показали, что $d_t(v) > d_t(u) + 1$. Противоречие.

АЛГОРИТМ ЭДМОНДСА-КАРПА

Назовем ребро увеличивающего пути критическим, если его емкость совпадает с пропускной способностью пути.

Лемма 2. Если ребро (u, v) было критическим в моменты t_1 и t_2 , то $d_{t_2}(v) \geq d_{t_1}(v) + 2$.

Док-во. (u, v) – критическое ребро в G_{t_1} , значит, оно отсутствует в сети G_{t_1+1} . Но оно есть в G_{t_2} , значит, в какой-то момент времени оно появляется опять. Значит, в какой-то сети G_s для $t_1 < s < t_2$ увеличивающий путь содержит ребро (v, u) , т.е. $d_s(u) = d_s(v) + 1$. Тогда

$$d_{t_2}(v) = d_{t_2}(u) + 1 \geq d_s(u) + 1 = d_s(v) + 2 \geq d_{t_1}(v) + 2.$$

Поскольку кратчайший путь не может содержать более V вершин, то $d_t(v) \leq V - 1$. Следовательно, ребро может быть критическим не более, чем $(V - 1)/2 + 1$ раз.

АЛГОРИТМЫ ПОИСКА МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

TODO

- ▶ Эдмондс-Карп (1970) $O(VE^2)$
- ▶ Диниц (1970) $O(V^2E)$
- ▶ ...
- ▶ Кинг, Рао и Тарьян (2013) $O(VE \log_{\frac{E}{V \log V}} V)$
- ▶ ...
- ▶ Чен, Кинг, Лиу, Пен, Гутенберг, Сахдева (2022)
 $O(E^{1+o(1)} \log U)$ (U - максимальная емкость ребра после приведения к целочисленным емкостям)
- ▶ ...

ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ ПАРОСОЧЕТАНИИ

Дано: t задач, каждая выполняется единицу времени;
 n сотрудников, для каждого известно какие задачи он может выполнять.

Найти: максимальное количество задач, которое можно выполнить за единицу времени.

Паросочетанием в двудольном графе называется множество его ребер такое, что никакие два ребра не имеют общих вершин.

ТЕОРЕМА ХОЛЛА

Пусть G – двудольный граф и для любого подмножества вершин первой доли размера k существует не менее k инцидентных им вершин из второй доли. Тогда в графе G существует совершенное паросочетание (количество пар = количество вершин первой доли).

Двудольный граф (V, E) , $V = L \cup R$

Теорема Холла.

Пусть для любых k вершин из L существует $\geq k$ вершин из R , соединенных с ними ребрами.

$$\forall S \subset L : |\{v \mid v \in R, \exists u \in S : (u, v) \in E\}| \geq |S|.$$

Тогда в графе G существует совершенное паросочетание.

ТЕОРЕМА КЁНИГА

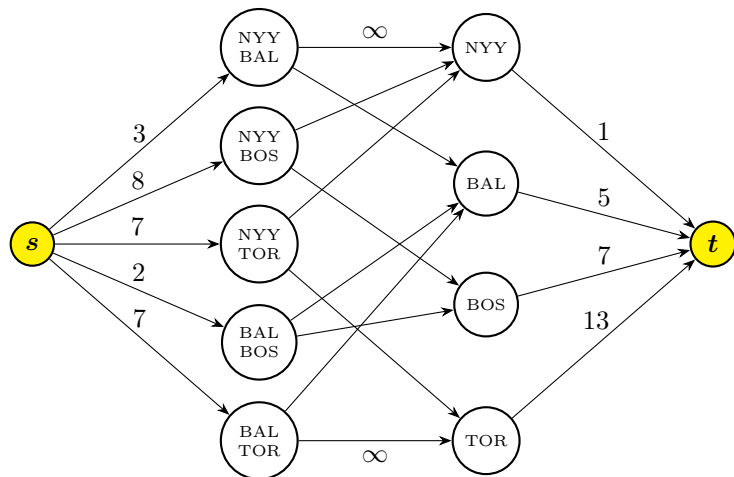
В двудольном графе количество ребер в максимальном паросочетании равно числу вершин в минимальном вершинном покрытии.

БЕЙСБОЛ

Команда	В	И	NYY	BAL	BOS	TOR	DET
New York Yankees	75	28		3	8	7	3
Baltimore Orioles	71	28	3		2	7	4
Boston Red Sox	69	27	8	2		0	0
Toronto Blue Jays	63	27	7	7	0		0
Detroit Tigers	49	27	3	4	0	0	

В плей-офф проходит одна команда из лиги. Есть ли шансы у Detroit Tigers? Спортивные комментаторы в 1996 году говорили, что есть: $49 + 27 = 76 > 75$.

БЕЙСБОЛ



УТВ. Detroit Tigers может занять первое место только, если существует поток, полностью использующий все емкости ребер, исходящих из s .