Адрианов Н.М.
Иванов А.Б.

Алгоритмы и структуры данных

Линейное программирование

Задача о демократических выборах

	Горожане	Пригород	Село
Строительство дорог	-2	5	3
Контроль использования оружия	8	2	-5
Сельхоз субсидии	0	0	10
Налог на бензин	10	0	-2

Дано:

- горожан - 100 000
- пригород - 200 000
- селян - 50 000
- в таблице отдача в тысячах голосов за $1000 рекламы

Цель: Набрать минимум половину голосов в каждом "округе"за минимальные вложения денег.

Задача о демократических выборах

	Горожане	Пригород	Село
Строительство дорог	-2	5	3
Контроль использования оружия	8	2	-5
Сельхоз субсидии	0	0	10
Налог на бензин	10	0	-2

Стандартная форма задачи ЛП

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array}$$

$$x_1,\, x_2,\, \dots x_n \geq 0$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \max$$

$$Ax \leq b,\ x \geq 0$$

$$c^T x \to \max$$

Варианты задач и сведение к станд. форме

$c^T x \to \min$	$-c^T x \to \max$
$a_i^T x \geq b$	$-a_i^T x \leq b$
$a_i^T x = b$ (каноническая)	$a_i^T x \leq b$ $a_i^T x \geq b$
без условия $x_i \geq 0$	$x_i = x_i^+ - x_i^-$ $x_i^+ \geq 0$ $x_i^- \geq 0$

Транспортная задача

Дано:

- Источники S_i и их мощность s_i
- Потребители T_j и их потребности t_j
- Стоимость p_{ij} доставки товара из S_i в T_j

Требуется: найти схему доставки товара минимальной цены.

Максимальный поток

Дано:

- Ориентированный граф $G = (V, E)$
- Для каждого ребра $(u, v) \in E$ задана пропускная способность $c(u, v)$
- Исток $s \in V$, сток $t \in V$

Требуется: определить максимально возможную величину потока из s в t.

Максимальное паросочетание

Дано: двудольный граф $G = (V, E)$

$$V = X \cup Y, \quad \forall\,(u, v) \in E \quad u \in X,\, v \in Y$$

Требуется: найти независимое подмножество ребер $M \subset E$

$$\forall\,(u, v),\, (u', v') \in M \quad u \neq u',\, v \neq v'$$

с максимальным количеством элементов.

Решатели ЛП

- Excel
- GLPK (C library + app)
  `http://www.gnu.org/software/glpk/`
- cvxopt (Python package)
  `http://cvxopt.org/`

Линейное программирование: история

- Леонид Канторович, 1939
  «Математические методы организации и планирования производства»
  лауреат Нобелевской премии по экономике 1975 года
- Джордж Данциг, 1947
  симплекс-метод
- Леонид Хачиян, 1979
  метод эллипсоидов, полиномиальное время
- Нарендра Кармаркар, 1984
  метод внутренних точек

Стандартная форма задачи ЛП

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array}
$$

$$x_1,\, x_2,\, \ldots x_n \geq 0$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$Ax \leq b,\ x \geq 0$$

$$c^T x \to \max$$

Геометрический смысл задачи ЛП

Существует ли решение?

- Несовместная задача
- Неограниченная задача

Сведение станд. формы к канонической

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & + & x_{n+2} & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & + & x_{n+m} & = & b_m
\end{array}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n,\ x_{n+1},\ \ldots\ x_{n+m} \geq 0$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$Ax + x_s = b, \quad x \geq 0,\ x_s \geq 0$$

$$c^Tx \to \max$$

Dictionary

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_{n+1} & = & b_1 & - & a_{11}x_1 & - & a_{12}x_2 & - & \dots & - & a_{1n}x_n \\
x_{n+2} & = & b_2 & - & a_{21}x_1 & - & a_{22}x_2 & - & \dots & - & a_{2n}x_n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
x_{n+m} & = & b_m & - & a_{m1}x_1 & - & a_{m2}x_2 & - & \dots & - & a_{mn}x_n \\
\hline
z & = & 0 & + & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \dots & + & c_nx_n
\end{array}$$

Пока что: предполагаем, что точка $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является допустимым решением (равносильно тому, что $b_i \geq 0$).

Pivoting: entering / leaving vars

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_{B1} & = & b_1 & + & a_{11}x_{I1} & + & a_{12}x_{I2} & + & \dots & + & a_{1n}x_{In} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
x_{Bk} & = & b_k & + & a_{k1}x_{I1} & + & a_{k2}x_{I2} & + & \dots & + & a_{kn}x_{In} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
x_{Bm} & = & b_m & + & a_{m1}x_{I1} & + & a_{m2}x_{I2} & + & \dots & + & a_{mn}x_{In} \\
\hline
z & = & c_0 & + & c_1x_{I1} & + & c_2x_{I2} & + & \dots & + & c_nx_{In}
\end{array}
$$

1. Выбираем j такое, что $c_j > 0$
2. Выбираем k такое, что $a_{kj} < 0$ и $-b_k/a_{kj}$ – минимально

Pivoting: entering / leaving vars

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{B1} & = & b_1 & + & a_{11}x_{I1} & + & a_{12}x_{I2} & + & \ldots & + & a_{1n}x_{In} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
x_{Bk} & = & b_k & + & a_{k1}x_{I1} & + & a_{k2}x_{I2} & + & \ldots & + & a_{kn}x_{In} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
x_{Bm} & = & b_m & + & a_{m1}x_{I1} & + & a_{m2}x_{I2} & + & \ldots & + & a_{mn}x_{In} \\
\hline
z & = & c_0 & + & c_1x_{I1} & + & c_2x_{I2} & + & \ldots & + & c_nx_{In}
\end{array}
$$

1. Выбираем j такое, что $c_j > 0$
2. Выбираем k такое, что $a_{kj} < 0$ и $-b_k/a_{kj}$ – минимально

1. $\forall j \;\; c_j \leq 0$: оптимальное решение найдено
2. $\forall k \;\; a_{kj} \geq 0$: задача неограничена

Pivoting: dictionary transform

1. Строка k:

$$x_{Bk} \quad = \quad b_k \quad + \quad a_{k1}x_{I1} \quad + \quad \dots \quad + \quad a_{kj}x_{Ij} \quad + \quad \dots \quad + \quad a_{kn}x_{In}$$

$$\color{red}{x_{Ij}} \quad = \quad \frac{b_k}{-a_{kj}} \quad + \quad \frac{a_{k1}}{-a_{kj}}x_{Ik} \quad + \dots + \quad \color{red}{\frac{-1}{-a_{kj}}x_{Bk}} \quad + \dots + \quad \frac{a_{kn}}{-a_{kj}}x_{In}$$

2. Остальные строки: подставляем полученное выражение x_{Ij}.

Вспомогательная задача

Что делать, если $\exists\, b_i < 0$?

Вводим дополнительную переменную x_0:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1} & = & b_1 + x_0 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & + & x_{n+2} & = & b_2 + x_0 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & + & x_{n+m} & = & b_m + x_0
\end{array}$$

$$x_1,\, x_2,\, \dots\, x_n,\, x_{n+1},\, \dots\, x_{n+m}, x_0 \geq 0$$

$$-x_0 \to \max$$

1. Вспомогательная задача всегда совместна
2. $\max = 0 \;\Leftrightarrow\;$ исходная задача совместна.

Dictionary вспомогательной задачи

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{B1} & = & b_1 & + & x_0 & + & a_{11}x_{I1} & + & \ldots & + & a_{1n}x_{In} \\
x_{B2} & = & b_2 & + & x_0 & + & a_{21}x_{I1} & + & \ldots & + & a_{2n}x_{In} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
x_{Bm} & = & b_m & + & x_0 & + & a_{m1}x_{I1} & + & \ldots & + & a_{mn}x_{In} \\
\hline
z & = & 0 & + & -x_0 & & & & & &
\end{array}
$$

Делаем pivot (x_0 – entering), *уменьшая* значение целевой функции

$$b_k = \min(b_1, \ldots, b_m)$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\color{red}{x_{Ij}} & = & \frac{b_k}{-a_{kj}} & + & \frac{a_{k1}}{-a_{kj}}x_{Ik} & + \ldots + & \color{red}{\frac{-1}{-a_{kj}}x_{Bk}} & + \ldots + & \frac{a_{kn}}{-a_{kj}}x_{In} \\
\color{red}{x_0} & = & \frac{b_k}{-1} & + & \frac{a_{k1}}{-1}x_{Ik} & + \ldots + & \color{red}{\frac{-1}{-a_{kj}}}x_k & + \ldots + & \frac{a_{kn}}{-a_{kj}}x_{In}
\end{array}
$$

Выбор entering переменной

1. Выбираем первую переменную x_j с $c_j > 0$ (Bland's rule)
2. Выбираем переменную x_j с максмальным c_j (Dantzig's rule)
3. Жадная эвристика: выбираем j дающую максимальное увеличение целевой функции

Может ли симплекс-метод зациклиться?

Да, в случае вырожденной задачи.

Правило Блэнда гарантирует, что зацикливания не будет.

Сложность симплекс-метода

Pivot выполняется за $O(nm)$

Утв. Dictionary восстанавливается однозначно по базисным переменнным

Следствие. Количество разных dictionary

$$\leq \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

Пример Klee-Minty

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
20x_1 & + & x_2 & & & & & \leq & 100 \\
200x_1 & + & 20x_2 & + & x_3 & & & \leq & 100^2 \\
2000x_1 & + & 200x_2 & + & 20x_3 & + & x_4 & \leq & 100^3 \\
 & & & & \dots & & & & \\
\end{array}
$$

$$2\left(\sum_{i=1}^{k-1} 10^{k-i} x_i\right) + x_k \leq 10^{k-1}$$

$$\dots$$

$$x_1,\, x_2,\, \dots x_n \geq 0$$

$$10^{n-1}x_1 + 10^{n-2}x_2 + \ldots + 10x_{n-1} + x_n \to \max$$

Искаженный куб. Симплекс метод с правилом Данцига проходит по всем 2^n вершинам.