

1. Определите скорость роста $T(n)$, если
 - а) $T(n) = 2T(n/3) + 1$;
 - б) $T(n) = 5T(n/4) + n$;
 - в) $T(n) = 7T(n/7) + n$;
 - г) $T(n) = 9T(n/3) + n^2$;
 - д) $T(n) = 8T(n/2) + n^3$;
 - е) $T(n) = 49T(n/25) + n^{3/2} \log n$;
 - ж) $T(n) = T(n-1) + 2$;
 - з) $T(n) = T(n-1) + n^c$, где $c \geq 1$ – константа;
 - и) $T(n) = T(n-1) + c^n$, где $c > 1$ – константа;
 - к) $T(n) = 2T(n-1) + 1$;
 - л) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$.

2. Быстрое возведение в степень. Придумайте алгоритм вычисления $f(x) = x^n$, использующий только $O(\log n)$ умножений.

3. Докажите, что алгоритмическая сложность возведения в квадрат n -битового числа не меньше, чем алгоритмическая сложность умножения n -битовых чисел. (Предположим, что мы умеем возводить в квадрат за время $f(n)$. Покажите, что тогда мы умеем умножать числа за $O(f(n))$.)

4. Показать, что если матрицу ($n \times n$) можно возвести в квадрат за $O(n^c)$, то матрицы можно умножать за $O(n^c)$.

5. Даны k упорядоченных массивов. Придумайте алгоритм их слияния. Оцените сложность алгоритма.

6. Дан произвольный массив чисел $a[i]$, $i = 0, \dots, n-1$. Требуется найти непрерывный подмассив $[r..s]$ с максимальной суммой:

$$\sum_{i=r}^s a[i] \rightarrow \max.$$

Придумайте алгоритм и оцените его сложность.

7. Продумайте алгоритм (напишите псевдокод) сортировки слиянием без использования рекурсивных вызовов (bottom-up mergesort). Идея: пусть массив разбит на отсортированные куски размера 2^m . Выполняем попарное слияние этих кусков, получая массив, разбитый на отсортированные куски размера 2^{m+1} .

8. Пусть даны n точек на плоскости. Какова сложность нахождения пары ближайших точек?

9. Задача 3-SAT. Предположим имеется n булевских переменных x_1, \dots, x_n и дано некоторое количество тройных дизъюнкций $x_i \vee x_j \vee x_k$. Определить, можно подобрать значения переменных таким образом, чтобы все эти дизъюнкции были истинны. Задача 3-SAT сложная.

Предположим, есть дополнительное условие: если x_i и x_j входят в один дизъюнкт, то $|j-i| < 10$. Придумайте линейный алгоритм решения таких задач 3-SAT.