Адрианов Н.М.
Иванов А.Б.

Алгоритмы дискретной оптимизации

Задачи разрешимости

Задачи поиска: Задача, в которой есть два ответа - "да"и "нет".

Пример ("Делимость на 4"):
Дано: Натурально число N
Вопрос: Существует ли натурально число m такое, что $N = 4m$?

Детерминированная машина Тьюринга (DTM)

Детерминированная машина Тьюринга (DTM):

- Алфавит $\Gamma \cup \{b\}$, где b - выделенный символ "пробела"
- Множество состояний $Q \cup \{q_0, q_Y, q_N\}$ с выделенным начальным состоянием q_0 и состояниями остановки q_Y, q_N
- Функция перехода $\delta : (Q \setminus \{q_Y, q_N\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{0, -1, +1\}$

Пример детерминированной машины Тьюринга (DTM)

Функция перехода δ:

	0	1	b
q_0	$(q_0, 0, +1)$	$(q_0, 1, +1)$	$(q_1, b, -1)$
q_1	$(q_2, b, -1)$	$(q_3, b, -1)$	$(q_N, b, -1)$
q_2	$(q_Y, b, -1)$	$(q_N, b, -1)$	$(q_N, b, -1)$
q_3	$(q_N, b, -1)$	$(q_N, b, -1)$	$(q_N, b, -1)$

Вход: 10100.

Пример детерминированной машины Тьюринга (DTM)

Время работы DTM

Время работы детерминированной машины Тьюринга M:

$$T_M(n) = \max\left\{ m : \begin{array}{c} \exists\, x \in \Gamma^*, |x| = n : \text{работа}\, M \text{ на входе } x \\ \text{завершается через } m \,\text{шагов} \end{array} \right\}$$

Тезис Чёрча

Любая задача (разрешимости), которая может быть решена в рамках любой *естественной* вычислительной модели за полиномиальное время, может быть решена за полиномиальное время некоторой детерминированной машиной Тьюринга. **И наоборот.**

RAM-машина

Инструкция	**Операнд**	**Семантика**
READ	j	$r_0 := I_j$
READ	$\uparrow j$	$r_0 := I_{r_j}$
STORE	j	$r_j := r_0$
STORE	$\uparrow j$	$r_{r_j} := r_0$
LOAD	x	$r_0 := x$
ADD	x	$r_0 := r_0 + x$
SUB	x	$r_0 := r_0 - x$
HALF		$r_0 := \left\lfloor \frac{r_0}{2} \right\rfloor$
JUMP	j	$k := j$
JPOS	j	**if** $r_0 > 0$ **then** $k := j$
JZERO	j	**if** $r_0 = 0$ **then** $k := j$
JNEG	j	**if** $r_0 < 0$ **then** $k := j$
HALT		$k := 0$

$j \in \mathbb{N}$, r_j - регистр, I_j - j-й вход, x - операнд вида j, $\uparrow j$, число.
k - номер текущей инструкции. Все инструкции (кроме последних четырех) неявно делают $k := k + 1$.

Пример RAM-машины

1. READ 1
2. STORE 1
3. STORE 5
4. READ 2
5. STORE 2
6. HALF
7. STORE 3
8. ADD 3
9. SUB 2
10. JZERO 14
11. LOAD 4
12. ADD 5
13. STORE 4
14. LOAD 5
15. ADD 5
16. STORE 5
17. LOAD 3
18. JZERO 20
19. JUMP 5
20. LOAD 4
21. HALT

Пример RAM

Теорема: Если RAM машина выполняет вычисление за время $f(n)$, то существует детерминированная машина Тьюринга, которая выполняет это вычисление за $O(f(n)^6)$.

Класс P

$$P = \left\{ \begin{array}{c} \text{задача} \\ \text{разрешимости} : \end{array} \begin{array}{c} \exists\,\text{детерминированная машина} \\ \text{Тьюринга}\, M : T_M(n) = O(n^k) \\ \text{для некоторого}\, k \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

Например, **"Делимость на 4"**$\in P$.

Симметричность класса P

Недетерминированная машина Тьюринга (NDTM)

Недетерминированная машина Тьюринга (NDTM) = DTM + "угадывающее устройство".

Недетерминированная машина Тьюринга (NDTM)

Время работы детерминированной машины Тьюринга M:

$$T_M(n) = \max\left\{ m : \begin{array}{c} \exists\, x, y \in \Gamma^*, |x| = n : \text{работа}\, M \text{ на входе } x \\ \text{с догадкой } y \\ \text{завершается в состоянии}\, q_Y \text{ через } m\, \text{шагов} \end{array} \right\}$$

(max может быть по пустому множеству. В таком случае положим $T_M(n) = 1$)

Класс NP

$$NP = \left\{ \begin{array}{cc} \text{задача} & \exists\,\text{недетерминированная машина} \\ \text{разрешимости}: & \text{Тьюринга}\,M : T_M(n) = O(n^k) \\ & \text{для некоторого}\,k \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

Эквивалентное определение NP

Симметричность класса NP