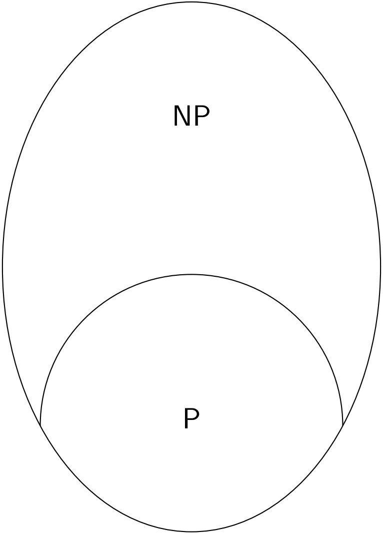
Адрианов Н.М.
Иванов А.Б.

Алгоритмы дискретной оптимизации

Сведение. NP-полнота. Теорема Кука.

$P \subseteq NP$



NP и экспоненциальная сложность

Теорема: Если $\Pi \in NP$, то существует многочлен p такой, что задача Π может быть решена некоторой детерменированной машиной Тьюринга за $O(2^{p(n)})$.

Полиномиальное сведение

Пусть у нас есть функция f, которая преобразует условие задачи Π_1 в условие задачи Π_2 такая, что:

- f может быть вычислена за полиномиальное время (на детерминированой машине Тьюринга)
- экземпляр x задачи Π_1 дает "да"тогда и только тогда, когда экземпляр $f(x)$ задачи Π_2 дает ответ "да"

Полиномиальное сведение

Утв 1: Пусть Π_1 сводится к Π_2. Тогда:

- $\Pi_2 \in P \implies \Pi_1 \in P$
- $\Pi_1 \notin P \implies \Pi_2 \notin P$

Утв 2: Есди Π_1 сводится к Π_2, Π_2 сводится к Π_3, то Π_1 сводится к Π_3.

Полиномиальное сведение для задач оптимизации

Полиномиальное + "обратная"полиномиально вычислимая функция g, преобразующая ответ.

Пример сведения №0

SAT $\longrightarrow$ делимость на 4.

Пример полиномиального сведения №1

Задача о гамильтоновом цикле $\longrightarrow$ задача коммивояжера.

Пример полиномиального сведения №2

SAT $\longrightarrow$ 3-SAT.

SAT: выполнима ли булева формула

$$F(x_1, x_2, \dots x_n) = \bigwedge_{j=1\dots m} \bigvee_k w_{jk}, \quad \text{где } w_{jk} = x_i \text{ или } \overline{x}_i$$

3-SAT: выполнима ли булева формула

$$F(x_1, x_2, \dots x_n) = \bigwedge_{j=1\dots m} \left(y_j \vee z_j \vee w_j\right), \ \text{где } y_j, z_j, w_j = x_i \text{ или } \overline{x}_i$$

SAT $\longrightarrow$ 3-SAT

Преобразуем каждый дизъюнкт $(w_1 \vee w_2 \ldots \vee w_k)$, вводя новые переменные:

- если $k = 1$ - $(w_1 \vee z_1 \vee z_2) \wedge (w_1 \vee \overline{z}_1 \vee z_2) \wedge (w_1 \vee z_1 \vee \overline{z}_2) \wedge (w_1 \vee \overline{z}_1 \vee \overline{z}_2)$
- если $k = 2$ - $(w_1 \vee w_2 \vee z_1) \wedge (w_1 \vee w_2 \vee \overline{z}_1)$
- если $k = 3$ - оставляем
- если $k > 3$ - $(w_1 \vee w_2 \vee z_1) \wedge (\overline{z}_1 \vee w_3 \vee z_2) \wedge \ldots \wedge (\overline{z}_{k-3} \vee w_{k-1} \vee w_k)$

NP - полнота

Задача $\Pi \in NP$ называется NP-полной, если любая задача из NP полиномиально сводится к ней.

Существуют ли такие задачи?

Теорема Кука-Левина

Теорема: SAT - NP-полная.

Доказательство теоремы Кука-Левина

Пусть есть задача $\Pi \in NP$ и соответствующая ей недетерминированная машина Тьюринга M, которая на входе $|x| = n$ работает время $p(n)$. Построим задачу SAT.

Состояния $Q : q_0, q_1 = q_Y, q_2 = q_N, q_3, \ldots, q_r$
Алфавит $\Gamma : s_0 = b, s_1, \ldots, s_\nu$

Доказательство теоремы Кука-Левина

Переменные:

- Q_{ik}, $0 \le i \le p(n)$, $0 \le k \le r$ - в момент времени i M находится в состоянии q_k
- H_{ij}, $0 \le i \le p(n)$, $-p(n) \le j \le p(n)$ - в момент времени i головка M находится в ячейке j
- S_{ijk}, $0 \le i \le p(n)$, $-p(n) \le j \le p(n)$, $0 \le k \le \nu$ - в момент времени i в ячейке j записан символ s_k

Доказательство теоремы Кука-Левина

Дизъюнкты разделим на группы:

- G_1: в каждый момент времени i M находится в одном состоянии
- G_2: в каждый момент времени i головка находится в одной ячейке
- G_3: в каждый момент времени i ячейка содержит ровно один символ
- G_4: в каждый момент времени 0 машина находится в начальной конфигурации для входа x
- G_5: в момент времени $p(n)$ машина находится в состоянии q_Y
- G_6: для каждого момента времени $0 \leq i < p(n)$ конфигурация M в момент $i + 1$ получена с помощью функции перехода δ из конфигурации состояния в момент i

Доказательство теоремы Кука-Левина

G_1:

$$(Q_{i0} \vee Q_{i1} \vee \ldots \vee Q_{ir}),\ 0 \le i \le p(n)$$

$$(\overline{Q_{ij}} \vee \overline{Q_{ij'}}),\ 0 \le i \le p(n),\ 0 \le j < j' \le r$$

G_2:

$$(H_{i,-p(n)} \vee H_{i,-p(n)+1} \vee \ldots \vee H_{i,p(n)+1}),\ 0 \le i \le p(n)$$

$$(\overline{H_{ij}} \vee \overline{H_{ij'}}),\ 0 \le i \le p(n),\ -p(n) \le j < j' \le p(n)$$

G_3:

$$(S_{ij0} \vee S_{ij1} \vee \ldots \vee S_{ij\nu}),\ 0 \le i \le p(n),\ -p(n) \le j \le p(n)+1$$

$$(\overline{S_{ijk}} \vee \overline{S_{ijk'}}),\ 0 \le i \le p(n),\ -p(n) \le j \le p(n),\ 0 \le k < k' \le \nu$$

Доказательство теоремы Кука-Левина

G_4 если $x = s_{k_1} s_{k_2} \dots s_{k_n}$:

$$(Q_{00}),\ (H_{01})$$

$$(S_{0,0,0}),\ (S_{0,1,k_1}),\ (S_{0,2,k_2}), \dots, (S_{0,n,k_n})$$

$$(S_{0,n+1,0}),\ (S_{0,n+2,0}), \dots, (S_{0,p(n)+1,0})$$

G_5:

$$(Q_{p(n),1})$$

Доказательство теоремы Кука-Левина

G_6:

$$\forall (i,j,k,l) : 0 \le i \le p(n),\ -p(n) \le j \le p(n)+1,$$
$$0 \le k \le r,\ 0 \le l \le \nu$$

$$(\overline{H_{ij}} \vee \overline{Q_{ik}} \vee \overline{S_{ijl}} \vee H_{i+1,j+\Delta})$$
$$(\overline{H_{ij}} \vee \overline{Q_{ik}} \vee \overline{S_{ijl}} \vee Q_{i+1,k'})$$
$$(\overline{H_{ij}} \vee \overline{Q_{ik}} \vee \overline{S_{ijl}} \vee S_{i+1,j,l'})$$

, где

$$\delta(q_k, s_l) = (q_{k'}, s_{l'}, \Delta) \text{ для } q_k \in Q \setminus \{q_Y, q_N\}$$
$$\Delta = 0,\ k' = k,\ l' = l \text{ для } q_k \in \{q_Y, q_N\}$$