Десять лекций по квантовой информатике

Введение.

Предлагаемый курс лекций посвящен новому разделу прикладной геометрической алгебры и алгебраической топологии – квантовой информатике.

Идея использования квантовой теории в качестве вычислительного инструмента была впервые высказана в 80-е годы прошлого столетия советским математиком Юрием Маниным и американским физиком Ричардом Фейнманом. Эта идея сразу привлекла к себе внимание мирового научного сообщества – физиков, математиков, инженеров и программистов. Сразу началось освоение её по множеству направлений: разработка и создание квантовых компьютеров, квантовых алгоритмов, квантовых кодов, квантовой криптографии, квантовой телепортации и т.д.

Не остались в стороне и философы, в первую очередь, представители научной школы эволюционной эпистомологии науки Карла Поппера. Философский дискурс по квантовой информатике на современном этапе посвящен проекту создания информационной интерпретации квантовой механики.

Первое направление дискурса “*it from bit”* (**Всё из бита)** имеет онтологическое значение и было сформулировано американским физиком Джоном Уилером в 1990 году. В основу этого направления положено представление Мира как бесконечного текста (см. глубоко философский рассказ аргентинского писателя Борхеса «Вавилонская библиотека»).

Второе направление *“it from qubit”* (**Всё из кубита**) имеет эпистомологическое значение и зиждется на основном понятии квантовой информатики – **кубите**, определенном Беном Шумахером в 1995 году. По убеждению многих физиков, информационная интерпретация квантовой механики уже существовала в истории физики в виде копенгагенской вероятностной интерпретации квантовой механики, развитой научной школой Нильса Бора.

Лекции построены на основании обратной эпистомологической последовательности квантовой информатики, т.е. на принципе обратной хронологии:

1) Кубит (1995) → 2) Сфера Феликса Блоха (1946) → 3) 1-ое расслоение Хайнца Хопфа (1931) → 4) Спинор Вольфганга Паули (1927) → 5) Спинор Эли Картана (1913) → 6) Сфера Анри Пуанкаре (1892) → 7) Сфера Бернхарда Римана (1856) → 8) Параметры Джорджа Стокса поляризации света (1852) → 9) Единичный кватернионУильяма Гамильтона (1843).

   Первая монография «Математические основы квантовой механики» была написана Джоном фон Нейманом в 1932 году. В Главе 4 «Дедуктивное построение теории» при построении теории скрытых переменных он допустил ошибку, которая была исправлена Гретой Герман в 1935 году, но исправление оставалось неизвестным вплоть до появления двух статей Джона Стюарта Белла в 1964 и 1966 годах.

Лекция 1. Базовый объект квантовой информатики кубит $¿\Psi\rangle$ – вектор состояния двухуровневой квантовой системы.

Кубит является вектором унитарного пространства $H=C^2$.

Определение 1. *Унитарным пространством называется комплексное линейное пространство L с эрмитовым положительно определенным скалярным произведением.*

Физическими реализациями **кубита** являются спин (внутренний угловой момент) электрона или атома со спином 1/2, поляризация монохроматического фотона, любая квантовая система (с двумя активными энергетическими уровнями.

Введем *обозначения Дирака* бра $\langle$ и кет $\rangle$ от английского слова bracket (скобки) $\langle,\rangle$.

Каждому вектору-столбцу $|\Psi\rangle$ поставим в соответствие вектор-строку $\langle\Psi|$ по следующему правилу:

$$|\Psi\rangle=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\to\langle\ \Psi\vee¿(\alpha^{¿}\quad\beta^{¿})=(|\Psi\rangle)\ .$$

В этом равенстве используется эрмитово сопряжение вектора-столбца † – транспонирование и комплексное сопряжение.

Определение 2. Унитарное пространство – комплексное линейное пространство векторов $|\Psi\rangle$, в котором каждой упорядоченной паре векторов $|\varphi\rangle$ и $|\Psi\rangle$ поставлено в соответствие комплексное число $(|\varphi\rangle, |\Psi\rangle)$, обозначаемое кратко $\langle\varphi|\Psi\rangle$ и называемое их скалярным произведением, так что выполнены постулаты:

1. $\langle\varphi|\Psi\rangle=(\langle\ \Psi\vee\varphi\,\rangle)^{¿}$;

2. $(|\varphi\rangle, a|\Psi_1\rangle+b\vee\Psi_2\rangle)=a\langle\varphi|\Psi_1\rangle+b\langle\varphi|\Psi_2\rangle$ для любых $a, b\in\mathbb{C}$;

3. $\langle\Psi|\Psi\rangle$ вещественно $\langle\Psi|\Psi\rangle\geq 0$, причем $\langle\Psi|\Psi\rangle=0\,\rangle\quad|\Psi\rangle=0$ (нулевой элемент пространства).

Из постулатов 1 и 2 следует, что скалярное произведение линейно по второму аргументу и антилинейно по первому, т.е.

$$(a|\varphi_1\rangle+b\vee\varphi_2,\vee\Psi\,\rangle)=a^{¿}\langle\varphi_1|\Psi\rangle+b^{¿}\langle\varphi_2|\Psi\rangle,\forall\ a,b\in C.$$

Задание (вместо определения). Найти математический и топологический объект и геометрическую фигуру, удобную для изображения и записи двух комплексных чисел α и β, принадлежащих двумерному гильбертову пространству (**спиновому пространству**) $H=C^2$, сумма квадратов модулей которых равна единице $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$.

Сфера Блоха

На сфере Блоха кубит $¿\Psi\,\rangle$ представлен как единичный вектор, лежащий на двумерной сфере S^2, θ- полярный угол , φ- азимутальный угол.

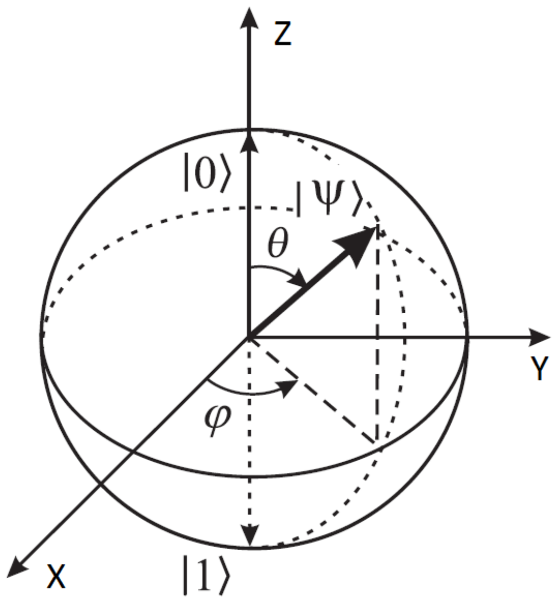

Рис.1 Представление кубита при помощи сферы Блоха

Итак, мы начинаем реализацию проекта «it from qubit» с упоминания тезиса сэра Майкла Берри: «На классические кости всегда можно нарастить мясо квантовой теории».

В классической механике сумма кинетической энергии $\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m}, \vec{p}=m\vec{v}$ и потенциальной энергии $V=V(\vec{r})$ для консервативной системы равна общей энергии

$$E=\frac{p^2}{2m}+V\,.$$

Подставляя дифференциальные операторы для полной энергии и момента

$$E=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\text{ и }\vec{p}=-\hbar\nabla$$

в уравнение общей энергии, записанное выше, получаем уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+V\Psi$$

дающее квантово-механическое описание электрона.

Уравнение Шредингера[1] объясняет все квантовые явления за исключением тех, которые связаны с магнетизмом и специальной теорией относительности.

Волновая функция Ψ комплекснозначная, $\Psi(\vec{r},t)\in C$.

Квадрат модуля $|\Psi|^2$, проинтегрированный по области пространства, дает вероятность нахождения электрона в этой области.[2]

Эксперимент Штерна и Герлаха 1922 года показал, что пучок атомов серебра в магнитном поле расщепляется на два. Два голландских студента Уленбек и Гаудсмит в 1925 году высказали гипотезу о вращающемся электроне для объяснения эксперимента Штерна и Герлаха из которой следовало, что атомы серебра и электрон обладают внутренним угловым моментом – спином. Спин электрона, взаимодействуя с магнитным полем, располагается «вверх» ↑ или «вниз» ↓ в зависимости от того, параллелен или нет спин вертикальному магнитному полю. Этим объясняется поляризация атомов серебра только в двух направлениях. Концепция спина позволила физикам обосновать Эффект Зеемана, но также создала много новых вопросов.

В 1913 году Эли Картан, занимаясь классификацией простых алгебр Ли, открыл новое представление ортогональной алгебры Ли A_1. Сначала он не дал специального названия этому представлению, и только много позже (1938), в соответствии с запросами квантовой механики[3], он определил действие этого представления на новые объекты – спиноры, которые описывают элементы группы вращений трехмерного пространства.

Спиноры нашли широкое применение в квантовой механике, когда стало ясно, что электрон и другие частицы (фермионы - протоны, нейтроны и мюоны обладают присущим только им внутренним угловым моментом (спином). Вольфганг Паули в 1927 году формализовал в нерелятивистском контексте связь магнитного углового момента электрона со спинором Картана в виде двумерного комплексного вектора (*спинора Паули*), а также

1 Уравнение Шредингера предполагает наличие корпускулярно-волнового дуализма.

2 Вероятностная интерпретация квантовой механики была введена Максом Борном в 1926 году.

3 Такие новые величины, как Ψ $\Psi(\vec{r},t)=\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}, \Psi_1, \Psi_2\in C,$

с числом компонент, равным двум, причем закон преобразования отличен от векторного или тензорного, доставляли много беспокойства физикам. Паули назвал эти величины *спинорами.*

ввел **спиновые матрицы Паули** (эрмитовы матрицы с нулевым следом над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$)

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Пространство состояний простейших, существенно нетривиальных квантовых систем, представляют собой унитарное пространство размерности два. В квантовой информатике в этом пространстве определяется основной объект, который по аналогии с классической теорией информации называется **кубитом.**

Фундаментальным свойством материи является квантовый угловой момент количества движения частицы (электрона, протона, нейтрона и т.д.). Самым простым является рассмотрение идеализированной модели в виде одного электрона без учета его пространственного (орбитального) движения, а только с учетом «спиновой степени свободы», так что его вектор состояния принадлежит $H=C^2$. Термин «спин» применяется для обозначения вращения механического объекта относительно некоторой оси.

В квантовой механике с термином спин связываются двухуровневые квантовые системы и спиновое пространство $H=C^2$. Таким образом, **кубит** принадлежит спиновому пространству $H=C^2$ и представляет собой **спинор ранга один**, который в вычислительном (стандартном) базисе (базисе Дирака) записывается как $|\Psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle=\alpha\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+¿\ \beta$

$\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\in H$, *где* $\alpha,\beta\in C$ *и удовлетворяют условию нормировки*

$|\alpha|^2+|\beta|^2=1.$

Коспинор ранга один принадлежит сопряженному (дуальному) спиновому пространству $\boldsymbol{\mathcal{H}}=\widetilde{C}^2$ и записывается в виде бра-вектора (строки) Дирака в виде

$\langle\Psi^{¿}\vee¿(\alpha^{¿}\beta^{¿})\in\widetilde{C}^2.$

Кубит является **единичным кватернионом**. Применительно к единичному кватерниону 1-е расслоение Хопфа осуществляет проектирование гомологической 3-сферы (S^3вложена вR^4) на 2-сферу (S^2 вложена в R^3). 4-

мерные и 3-мерные пространства связаны посредством единичной окружности S^1, которая представляет собой расслоение пучка, состоящего из глобальной, геометрической и динамической фаз (различные определения фазы Берри (1984)).

1-е расслоение Хопфа для кубита

$S^3 \underset{\rightarrow}{S^1} S^2$

Четвертое измерение «не видно» непосредственно в 3-мерном пространстве, и мы можем воспринимать только «тени», которые и описывают собственный спин фундаментальных частиц.

От гомологической трехмерной сферы в физике остается сфера Блоха   и сфера Римана – база расслоения Хопфа.