Институт Компьютерных Исследований

R&C Dynamics

PROBLEMS & SOLUTIONS IN QUANTUM COMPUTING & QUANTUM INFORMATION

Willi-Hans Steeb
Yorick Hardy

Rand Afrikaans University, South Africa

World Scientific

NEW JERSEY • LONDON • SINGAPORE • BEIJING • SHANGHAI • HONG KONG • TAIPEI • CHENNAI

Задачи
и их решения
в квантовых вычислениях и квантовой теории информации

Вилли-Ханс Стиб

Йорик Харди

Перевод с английского Ю. А. Сагдеевой

Под редакцией д. ф.-м. н., профессора А. А. Кокина
и д. ф.-м. н. Ю. И. Богданова

Москва ♦ Ижевск

2013

УДК 530.145

Стиб В.-Х., Харди Й.
Задачи и их решения в квантовых вычислениях и квантовой теории информации. — Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. — 296 с. — опубл. 04.09.2013. — Электрон. версия печ. публ. — Доступ с сайта ЭБС IPRbooks.

Квантовая теория информации и квантовые вычисления — одна из самых быстроразвивающихся и привлекательных для исследований областей физики. В предлагаемой книге собраны задачи по квантовой обработке данных с подробными решениями. Она состоит из двух частей: в первой части рассматриваются конечномерные системы, во второй — бесконечномерные. Авторы дают объяснение всем основным понятиям квантовой теории информации: квантовые вентили и квантовые цепи, запутывание, телепортация, состояния Белла, разложение Шмидта, квантовое преобразование Фурье, магический вентиль, энтропия фон Неймана, квантовая криптография, квантовое исправление ошибок, когерентные состояния, сжатые состояния, гамильтониан Керра и др. Выделение базовых понятий, четкая структура изложения материала, детальный разбор примеров дают студентам возможность освоить принципы и методы решения задач разной сложности.

Данное издание может быть использовано в качестве учебного пособия по линейной алгебре или по теории матриц.

ISBN 978-5-93972-601-6

Оглавление

ЧАСТЬ II. БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА 201

Введение

Книга, в которой собраны задачи по квантовым вычислениям и квантовой информатике с их подробными решениями, будет полезна как аспирантам, так и исследователям, работающим в этих областях. В ней представлены все важные понятия и темы такие как: квантовые вентили, квантовые цепи, запутывание, телепортация, состояния Белла, разложение Шмидта, квантовое фурье-преобразование, магический вентиль, энтропия фон Неймана, квантовая криптография, квантовое исправление ошибок, когерентные состояния, сжатые состояния, квантовые измерения, гамильтониан Керра и др. Задачи располагаются по степени сложности от простых до более сложных. Почти для всех задач приведены подробные решения, большинство из них не зависят друг от друга, при этом приводятся все необходимые определения. Книга дает студентам возможность освоить принципы и методы, необходимые для решения задач. Она может быть полезна и преподавателям в качестве дополнительного учебного материала, в котором развиваются важные понятия и методики. Данное издание может использоваться в качестве учебника или пособия по линейной алгебре или теории матриц.

Обозначения

$\emptyset$	пустое множество
$\mathbf{N}$	множество натуральных чисел
$\mathbf{Z}$	множество целых чисел
$\mathbf{Q}$	множество рациональных чисел
$\mathbf{R}$	множество вещественных чисел
$\mathbf{R}^+$	множество неотрицательных вещественных чисел
$\mathbf{C}$	множество комплексных чисел
$\mathbf{R}^n$	n-мерное вещественное евклидово пространство
$\mathbf{C}^n$	n-мерное комплексное линейное пространство
$\mathcal{H}$	гильбертово пространство
i	$\sqrt{-1}$
$\operatorname{Re} z$	вещественная часть комплексного числа z
$\operatorname{Im} z$	мнимая часть комплексного числа z
$A \subset B$	A есть подмножество B
$A \cap B$	пересечение множеств A и B
$A \cup B$	объединение множеств A и B
$f \circ g$	композиция двух отображений $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
t	временная переменная
$\mathbf{x}$	вектор-столбец из $\mathbf{C}^n$
$\mathbf{x}^T$	транспонирование $\mathbf{x}$ (вектор-строка)
$\Vert . \Vert$	норма
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \equiv \mathbf{x}^* \mathbf{y}$	скалярное произведение (внутреннее произведение) в $\mathbf{C}^n$
$\langle . \vert . \rangle$	скалярное произведение в гильбертовом пространстве
$\mathbf{x} \times \mathbf{y}$	векторное произведение

$A \otimes B$	кронекерово произведение матриц A и B
$f \otimes g$	тензорное произведение элементов f и g гильбертовых пространств
$\det(A)$	определитель квадратной матрицы A
$\mathrm{tr}(\mathrm{A})$	след квадратной матрицы A
$\mathrm{rank}(A)$	ранг матрицы A
A^T	транспонированная матрица A
$\overline{A}$	комплексно сопряженная к A матрица
A^*	эрмитово сопряженная (сопряженная транспонированная матрица) A
$A^\dagger$	другое обозначение для эрмитово сопряженной матрицы A (такое обозначение используется в физике)
I_n	$n \times n$ единичная матрица
I	единичный оператор
$[A, B] := AB - BA$	коммутатор для квадратных матриц A и B
$[A, B]_+ := AB + BA$	антикоммутатор для квадратных матриц A и B
δ_{jk}	символ Кронекера, $\delta_{jk} = 1$ при $j = k$ и $\delta_{jk} = 0$ при $j \neq k$
λ	собственное значение
ϵ	вещественный параметр
H	функция Гамильтона
$\widehat{H}$	гамильтониан
$\{\|0\rangle, \|1\rangle, \ldots, \|n-1\rangle\}$	произвольный ортонормированный базис для пространства $\mathbf{C}^n$
$\hbar$	$h/2\pi$, где h — константа Планка
ω	частота
$b, b^\dagger$	бозе-операторы уничтожения и рождения
$\|\beta\rangle$	когерентное состояние
$D(\beta) = \exp(\beta b^\dagger - \beta^* b)$	оператор перемещения

В книге часто используются спиновые матрицы Паули. Эти матрицы имеют вид

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В некоторых случаях используются также обозначения σ_1, σ_2 и σ_3 вместо σ_x, σ_y и σ_z .

Кроме того, в книге используются так называемые обозначения Дирака. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, и $\mathcal{H}_*$ — дуальное пространство, дополненное операцией умножения вида

$$(c, \phi) = \bar{c}\phi,$$

где $c \in \mathbf{C}$ и $\phi \in \mathcal{H}$. Скалярное произведение может быть рассмотрено как билинейная форма (свойство дуальности)

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H}_* \times \mathcal{H} \to \mathbf{C}$$

такая, что линейные отображения

$$\langle \phi | : \psi \to \langle \phi | \psi \rangle, \quad \langle \cdot | : \mathcal{H}_* \to \mathcal{H}'$$

$$| \psi \rangle : \phi \to \langle \phi | \psi \rangle, \quad | \cdot \rangle : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'_*,$$

где штрих означает пространство линейных непрерывных функционалов соответствующего пространства, являющиеся мономорфизмами. Векторы $\langle \phi |$ и $| \psi \rangle$ называются бра- и кет- векторами соответственно. Кет-вектор $| \phi \rangle$ однозначно определяется вектором $\phi \in \mathcal{H}$, следовательно, можно записать, что $| \phi \rangle \in \mathcal{H}$.

В книге используется понятие гильбертова пространства. *Гильбертово пространство* — это множество $\mathcal{H}$ элементов или векторов $(f, g, h, \ldots)$, которые удовлетворяют следующим условиям (1)–(5).

(1) Если f и g принадлежат $\mathcal{H}$, то существует единственный элемент из $\mathcal{H}$, обозначаемый через $f + g$, причем операция сложения $(+)$ является обратимой, коммутативной и ассоциативной операцией.

(2) Если c — комплексное число, то для любого f из $\mathcal{H}$ существует элемент cf из $\mathcal{H}$ и умножение векторов на комплексные числа, определенное таким образом, удовлетворяет дистрибутивному закону

$$c(f + g) = cf + cg, \qquad (c_1 + c_2)f = c_1 f + c_2 f.$$

(3) Гильбертовы пространства $\mathcal{H}$ содержат нулевой элемент, 0, имеющий свойство

$$0 + f = f$$

для всех векторов f из $\mathcal{H}$.

(4) Для каждой пары векторов f, g из $\mathcal{H}$ существует комплексное число $\langle f|g\rangle$, называемое внутренним или скалярным произведением f и g, такое что

$$\langle f|g\rangle = \overline{\langle g|f\rangle}$$
$$\langle f|g+h\rangle = \langle f|g\rangle + \langle f|h\rangle$$
$$\langle f|cg\rangle = c\langle f|g\rangle$$

и

$$\langle f|f\rangle \geqslant 0.$$

Равенство в последней формуле достигается тогда, если $f = 0$. Скалярное произведение определяет норму $\|f\| = \langle f|f\rangle^{1/2}$.

(5) Если $\{f_n\}$ — последовательность из $\mathcal{H}$, удовлетворяющая условию Коши

$$\|f_m - f_n\| \to 0$$

при m и n, стремящихся к бесконечности независимо, то существует единственный элемент f из $\mathcal{H}$ такой, что $\|f_n - f\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $B = \{\phi_n : n \in I\}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Множество I — счетное множество индексов. Тогда

(1) $$\bigwedge_{f\in\mathcal{H}} \qquad f = \textstyle\sum_{n\in I}\langle f|\phi_n\rangle\phi_n,$$

(2) $$\bigwedge_{f,g\in\mathcal{H}} \qquad \langle f|g\rangle = \textstyle\sum_{n\in I}\overline{\langle f|\phi_n\rangle}\langle g|\phi_n\rangle.$$

Часть I

Конечномерные гильбертовы пространства

Глава 1

Кубиты

Один *кубит* представляет собой систему с двумя состояниями, такую как двухуровневый атом. Состояния (кет-векторы) $|h\rangle$ и $|v\rangle$ горизонтальной и вертикальной поляризации фотона также могут рассматриваться как системы с двумя состояниями. Другим примером служат относительная фаза и интенсивность одиночного фотона в двух плечах интерферометра. Базовым для кубита является гильбертово пространство $\mathbb{C}^2$. Произвольный ортонормированный базис для $\mathbb{C}^2$ обозначим через $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Классические булевы состояния, 0 и 1, могут быть представлены постоянной парой ортонормированных состояний кубита.

Задача 1. Обозначим два ортонормированных состояния одиночного кубита через

$$\{|0\rangle, |1\rangle\},$$

где

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1, \quad \langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0.$$

Любое состояние этой системы может быть записано как *суперпозиция* (линейная комбинация состояний)

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Получить параметрическое представление для произвольного кубита: (i) в поле вещественных чисел, (ii) в поле комплексных чисел.

Решение 1. (i) Используя $\cos\theta$, $\sin\theta$ и тождество

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

для всех $\theta \in \mathbb{R}$, имеем представление

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

(ii) В качестве представления получим

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi}\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

где $\phi \in \mathbb{R}$ и $e^{i\phi}e^{-i\phi} = 1$.

Задача 2. Рассмотрим нормированные состояния

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}.$$

Определить, при каких θ_1 и θ_2 выражение

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

нормировано.

Решение 2. Из условия, что вектор

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 + \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 + \sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

нормирован, следует, что

$$(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)^2 + (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2 = 1.$$

Откуда получим, что

$$\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = -\frac{1}{2},$$

а значит, $\theta_1 - \theta_2 = 2\pi/3$ или $\theta_1 - \theta_2 = 4\pi/3$.

Задача 3. Пусть $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{R}^2$. Допустим,

$$A := |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|.$$

Рассмотрим три случая:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad |0\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, && |1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
&\text{(ii)} \quad |0\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, && |1\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
&\text{(iii)} \quad |0\rangle := \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, && |1\rangle := \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Найдите матричное представление A в этих базисах.

Решение 3. Мы можем найти непосредственным расчетом

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
&\text{(ii)} \quad A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
&\text{(iii)} \quad A = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Для всех трех случаев

$$A = I_2,$$

где I_2 — это единичная матрица 2×2. Очевидно, два первых случая являются частными случаями третьего и входят в него.

Задача 4. Пусть $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^2$. *Операция отрицания НЕ (NOT)* (унитарный оператор) имеет вид

$$|0\rangle \to |1\rangle, \quad |1\rangle \to |0\rangle.$$

(i) Найти унитарный оператор U_{NOT}, который реализует операцию отрицания относительно базиса $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

(ii) Примем, что

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матричное представление U_{NOT} для этого базиса.

(iii) Пусть

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Найти матричное представление U_{NOT} для этого базиса.

Решение 4. (i) Очевидно, что

$$U_{NOT} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|,$$

так как $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$ и $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$.

(ii) Для стандартного базиса получаем

$$U_{NOT} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}.$$

(iii) Для базиса Адамара находим

$$U_{NOT} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы определили, что матричные представления для двух базисов отличны.

Задача 5. *Преобразование Уолша – Адамара* является 1-кубитовой операцией и обозначается H. Оно представляет следующее преобразование:

$$|0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big), \qquad |1\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big).$$

(i) Найти унитарный оператор U_H, который реализует H относительно базиса $\big\{|0\rangle, |1\rangle\big\}$.

(ii) Найти обратный оператор.

(iii) Пусть

$$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Найти матричное представление U_H для этого базиса.

(iv) Пусть

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Найти матричное представление U_H для этого базиса.

Решение 5. (i) Очевидно, что

$$U_H = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big)\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big)\langle 1| =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle\big(\langle 0| + \langle 1|\big) + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\big(\langle 0| - \langle 1|\big).$$

(ii) Оператор U_H — унитарный, и обратный к нему оператор имеет вид $U_H^{-1} = U_H^* = U_H$, где $*$ означает эрмитово сопряжение.

(iii) Для стандартного базиса получим

$$U_H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iv) Для базиса Адамара получим

$$U_H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Как видно из полученных результатов, матричные представления U_H для каждого из двух базисов одинаковы.

Задача 6. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbb{C}^2$ и линейный оператор (матрицу 2×2):

$$\Pi(\mathbf{n}) := \frac{1}{2}\left(I_2 + \sum_{j=1}^{3} n_j \sigma_j\right),$$

где $\mathbf{n} := (n_1, n_2, n_3)$ $(n_j \in \mathbb{R})$ — единичный вектор, то есть

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Здесь σ_1, σ_2, σ_3 являются *матрицами Паули*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а I_2 — единичная матрица 2×2.

(i) Описать свойства $\Pi(\mathbf{n})$, то есть найти $\Pi^\dagger(\mathbf{n})$, $\mathrm{tr}\big(\Pi(\mathbf{n})\big)$ и $\Pi^2(\mathbf{n})$.

(ii) Найти вектор
$$\Pi(\mathbf{n})\begin{pmatrix} e^{i\phi}\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$
Результат обсудить.

Решение 6. (i) Для матриц Паули получаем
$$\sigma_1^\dagger = \sigma_1, \quad \sigma_2^\dagger = \sigma_2, \quad \sigma_3^\dagger = \sigma_3.$$
Таким образом, $\Pi(\mathbf{n}) = \Pi^\dagger(\mathbf{n})$. Исходя из того что
$$\operatorname{tr}\sigma_1 = \operatorname{tr}\sigma_2 = \operatorname{tr}\sigma_3 = 0,$$
а операция определения следа линейна, получаем $\operatorname{tr}\bigl(\Pi(\mathbf{n})\bigr) = 1$. С учетом условий
$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I_2$$
и
$$[\sigma_1, \sigma_2]_+ = 0, \quad [\sigma_2, \sigma_3]_+ = 0, \quad [\sigma_3, \sigma_1]_+ = 0,$$
где
$$[A, B]_+ := AB + BA$$
описывает *антикоммутатор*, выражение
$$\Pi^2(\mathbf{n}) = \frac{1}{4}\left(I_2 + \sum_{j=1}^{3} n_j\sigma_j\right)^2 = \frac{1}{4}I_2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} n_j\sigma_j + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} n_j n_k \sigma_j\sigma_k$$
упрощается и принимает вид
$$\Pi^2(\mathbf{n}) = \frac{1}{4}I_2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} n_j\sigma_j + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{3} n_j^2 I_2.$$
Используя равенство $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, получим $\Pi^2(\mathbf{n}) = \Pi(\mathbf{n})$.

(ii) Искомый вектор примет вид
$$\Pi(\mathbf{n})\begin{pmatrix} e^{i\phi}\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1+n_3)e^{i\phi}\cos\theta + (n_1 - in_2)\sin\theta \\ (n_1 + in_2)e^{i\phi}\cos\theta + (1-n_3)\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Задача 7. *Три состояния кубита* определяются следующими состояниями:

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle, \quad |\psi_1\rangle = -\frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle, \quad |\psi_2\rangle = -\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle,$$

где $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ — ортонормированный базис. Найти

$$\big|\langle\psi_0|\psi_1\rangle\big|^2, \quad \big|\langle\psi_1|\psi_2\rangle\big|^2, \quad \big|\langle\psi_2|\psi_0\rangle\big|^2.$$

Решение 7. Учитывая, что $\langle 0|0\rangle = 1$, $\langle 1|1\rangle = 1$ и $\langle 0|1\rangle = 0$, находим

$$\big|\langle\psi_0|\psi_1\rangle\big|^2 = \frac{1}{4}, \quad \big|\langle\psi_1|\psi_2\rangle\big|^2 = \frac{1}{4}, \quad \big|\langle\psi_2|\psi_0\rangle\big|^2 = \frac{1}{4}.$$

Задача 8. Кет-векторы $|h\rangle$ и $|v\rangle$ представляют собой соответственно состояния горизонтальной и вертикальной поляризации. Рассмотрим состояния

$$\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= -\frac{1}{2}\big(|h\rangle + \sqrt{3}|v\rangle\big),\\
|\psi_2\rangle &= -\frac{1}{2}\big(|h\rangle - \sqrt{3}|v\rangle\big),\\
|\psi_3\rangle &= |h\rangle,\\
|\phi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(-|h\rangle + \sqrt{2}e^{-2\pi i/3}|v\rangle\big),\\
|\phi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(-|h\rangle + \sqrt{2}e^{+2\pi i/3}|v\rangle\big),\\
|\phi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\big(-|h\rangle + \sqrt{2}|v\rangle\big).
\end{aligned}$$

Дать интерпретацию этих состояний.

Решение 8. Из условий $\langle h|h\rangle = \langle v|v\rangle = 1$ и $\langle v|h\rangle = \langle h|v\rangle = 0$ находим

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = -\frac{1}{2}, \quad \langle\psi_1|\psi_3\rangle = -\frac{1}{2}, \quad \langle\psi_2|\psi_3\rangle = -\frac{1}{2}.$$

Решением уравнения $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$ является $\alpha = 120°$ или $\alpha = 240°$. Следовательно, первые три состояния $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$ соответствуют состояниям линейной поляризации, отличающейся на $120°$. Получим

$$\langle\phi_1|\phi_2\rangle = -\frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Состояния $|\phi_1\rangle$ и $|\phi_2\rangle$ соответствуют эллиптической поляризации, $|\phi_3\rangle$ — линейной.

Задача 9. Пусть

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\phi}\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

где $\phi, \theta \in \mathbb{R}$.

(i) Найти $\rho := |\psi\rangle\langle\psi|$.
(ii) Найти $\operatorname{tr}\rho$.
(iii) Найти ρ^2.

Решение 9. (i) Так как

$$\langle\psi| = (e^{-i\phi}\cos\theta, \sin\theta),$$

матрица ρ размера 2×2 имеет вид

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & e^{i\phi}\sin\theta\cos\theta \\ e^{-i\phi}\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

(ii) Из тождества $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ и (i) получим

$$\operatorname{tr}\rho = 1.$$

(iii) Учитывая, что $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, получим

$$\rho^2 = \big(|\psi\rangle\langle\psi|\big)^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho.$$

Задача 10. Рассмотрим гамильтониан

$$\widehat{H} = \hbar\omega\sigma_x.$$

(i) Найти решение

$$\big|\psi(t)\big\rangle = e^{-i\widehat{H}t/\hbar}\big|\psi(t=0)\big\rangle$$

уравнения Шредингера

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \widehat{H}|\psi\rangle$$

при начальных условиях

$$\big|\psi(t=0)\big\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

(ii) Найти и исследовать вероятность

$$\left|\big\langle\psi(t=0)|\psi(t)\big\rangle\right|^2.$$

(iii) Решение *уравнения движения Гейзенберга*

$$i\hbar\frac{d\sigma_z}{dt} = [\sigma_z, \widehat{H}](t)$$

имеет вид

$$\sigma_z(t) = e^{i\widehat{H}t/\hbar}\sigma_z e^{-i\widehat{H}t/\hbar}.$$

Вычислить $\sigma_z(t)$.

(iv) Показать, что

$$\big\langle\psi(t=0)\big|\sigma_z(t)\big|\psi(t=0)\big\rangle = \big\langle\psi(t)\big|\sigma_z\big|\psi(t)\big\rangle.$$

Решение 10. (i) Решение уравнения Шредингера имеет вид

$$\big|\psi(t)\big\rangle = \exp(-i\widehat{H}t/\hbar)\big|\psi(t=0)\big\rangle.$$

Зная, что $\sigma_x^2 = I_2$, находим

$$\exp(-i\widehat{H}t/\hbar) \equiv U(t) = \begin{pmatrix}\cos(\omega t) & -i\sin(\omega t)\\ -i\sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{pmatrix},$$

где $U(t)$ — унитарная матрица. Таким образом,

$$\big|\psi(t)\big\rangle = U(t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ -i\sin(\omega t)\end{pmatrix}.$$

(ii) Вероятность

$$\left|\big\langle\psi(t=0)\big|\psi(t)\big\rangle\right|^2 = \cos^2(\omega t).$$

(iii) Из условий

$$[\sigma_z, \widehat{H}] = \hbar\omega[\sigma_z, \sigma_x] = 2i\hbar\omega\sigma_y,$$
$$[\sigma_y, \widehat{H}] = \hbar\omega[\sigma_y, \sigma_x] = -2i\hbar\omega\sigma_z$$

получаем систему матричнозначных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\sigma_z}{dt} = 2\omega\sigma_y(t),$$
$$\frac{d\sigma_y}{dt} = -2\omega\sigma_z(t)$$

с начальными условиями $\sigma_z(t = 0) = \sigma_z$ и $\sigma_y(t = 0) = \sigma_y$. Решение данной системы матричнозначных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\sigma_z(t) = \sigma_z \cos(2\omega t) + \sigma_y \sin(2\omega t),$$
$$\sigma_y(t) = \sigma_y \cos(2\omega t) - \sigma_z \sin(2\omega t).$$

(iv) Имеем

$$\big\langle \psi(t = 0) \big| \sigma_z(t) \big| \psi(t = 0) \big\rangle = \cos(2\omega t)$$

и

$$\big\langle \psi(t) \big| \sigma_z \big| \psi(t) \big\rangle = \cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) = \cos(2\omega t).$$

Задача 11. Рассмотрим *интерферометр Маха – Цандера*, в котором пара пучков охватывает двумерное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\big\{|0\rangle, |1\rangle\big\}$. Векторы состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ можно считать ортонормированными волновыми пакетами, которые перемещаются в двух заданных направлениях, определяемых геометрией интерферометра. Зеркала, светоделители и относительные фазовые сдвиги U_P можно представить в виде следующих унитарных матриц:

$$U_M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad U_P = \begin{pmatrix} e^{i\chi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу плотности

$$\rho_{in} = |0\rangle\langle 0|,$$

где $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ — стандартный базис. Используя его, найти

$$\rho_{out} = U_B U_M U_P U_B \rho_{in} U_B^\dagger U_P^\dagger U_M^\dagger U_B^\dagger.$$

Дать объяснение результату.

Решение 11. Так как

$$\rho_{in} = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1\ \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$U_B U_M U_P U_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\chi} + 1 & e^{i\chi} - 1 \\ -e^{i\chi} + 1 & -e^{i\chi} - 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\rho_{out} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos(\chi) & i \sin(\chi) \\ -i \sin(\chi) & 1 - \cos(\chi) \end{pmatrix}.$$

Это означает, что интенсивность вдоль $|0\rangle$ принимает вид

$$I \propto 1 + \cos(\chi).$$

Таким образом, относительную U_P-фазу χ можно наблюдать в выходном сигнале интерферометра.

Задача 12. Пусть $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{C}^2$.

(i) Найти

$$\big[|0\rangle\langle 1|, |1\rangle\langle 0|\big],$$

где $[A, B] := AB - BA$ означает *коммутатор*.

(ii) Вычислить

$$\exp\big(t|0\rangle\langle 1|\big).$$

(iii) Вычислить

$$\exp\big(t|1\rangle\langle 0|\big).$$

(iv) Вычислить

$$\exp\big(t|0\rangle\langle 1|\big) \exp\big(t|1\rangle\langle 0|\big).$$

(v) Вычислить

$$\exp\left(t\big(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\big)\right).$$

(vi) Определить, верно ли равенство

$$\exp\left(t\big(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\big)\right) = \exp\big(t|0\rangle\langle 1|\big) \exp\big(t|1\rangle\langle 0|\big).$$

Решение 12. (i) Из условий $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$ и $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$ следует, что

$$\big[|0\rangle\langle 1|, |1\rangle\langle 0|\big] = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|.$$

Отсюда видно, что коммутатор отличен от нуля.

(ii) Зная, что $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$, находим

$$\exp\big(t|0\rangle\langle 1|\big) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}\big(|0\rangle\langle 1|\big)^j = I_2 + t|0\rangle\langle 1|.$$

(iii) Аналогичным образом получаем

$$\exp\big(t|1\rangle\langle 0|\big) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}\big(|1\rangle\langle 0|\big)^j = I_2 + t|1\rangle\langle 0|.$$

(iv) Аналогичным образом получаем

$$\exp\big(t|0\rangle\langle 1|\big)\exp\big(t|1\rangle\langle 0|\big) = I_2 + t\big(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\big) + t^2|0\rangle\langle 0|.$$

(v) Так как

$$\big(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\big)^2 = I_2,$$

получаем

$$\exp\big(t|0\rangle\langle 1| + t|1\rangle\langle 0|\big) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j}}{(2j)!} I_2 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}\big(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\big) =$$
$$= \mathrm{ch}(t) I_2 + \mathrm{sh}(t)\big(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\big).$$

(vi) Очевидно, что

$$\exp\big(t\big(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\big)\big) \neq \exp\big(t|0\rangle\langle 1|\big)\exp\big(t|1\rangle\langle 0|\big).$$

Глава 2

Произведение Кронекера и тензорное произведение

Пусть $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ — два гильбертовых пространства, и $\mathscr{H}$ — третье гильбертово пространство, описываемое величинами $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ со следующими условиями. Для каждой пары векторов f_1, f_2 из $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ соответственно существует вектор из $\mathscr{H}$, равный $f_1 \otimes f_2$, такой, что

$$\langle f_1 \otimes f_2 | g_1 \otimes g_2 \rangle = \langle f_1 | g_1 \rangle_{\mathscr{H}_1} \langle f_2 | g_2 \rangle_{\mathscr{H}_2}.$$

Гильбертово пространство $\mathscr{H}$ содержит линейные комбинации векторов $f_1 \otimes f_2$ и сильные пределы их фундаментальных последовательностей. Величина $\mathscr{H}$ является *тензорным произведением* $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ и обозначается как $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$. Если $\widehat{A}_1$ и $\widehat{A}_2$ — линейные операторы, действующие в $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ соответственно, то оператор $\widehat{A}_1 \otimes \widehat{A}_2$, действующий в $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$, определяется по формуле

$$(\widehat{A}_1 \otimes \widehat{A}_2)(f_1 \otimes f_2) = (\widehat{A}_1 f_1) \otimes (\widehat{A}_2 f_2).$$

Произведение $\widehat{A}_1 \otimes \widehat{A}_2$ называют тензорным произведением $\widehat{A}_1$ и $\widehat{A}_2$. Таким же образом можно определить тензорное произведение n гильбертовых пространств. Для конечномерных гильбертовых пространств $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$ тензорное произведение сводится к произведению Кронекера.

Задача 1. Пусть $A := (a_{ij})_{ij}$ — матрица $m \times n$, и B — матрица $r \times s$. Произведение Кронекера A и B определяется как матрица $(m \cdot r) \times (n \cdot s)$:

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Следовательно, произведение $A \otimes B$ представляет собой матрицу $mr \times ns$.

(i) Пусть

$$|\phi_1\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\phi_2\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, набор $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ формирует базис в $\mathbb{C}^2$ (стандартный базис). Вычислить

$$|\phi_1\rangle \otimes |\phi_1\rangle, \quad |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle, \quad |\phi_2\rangle \otimes |\phi_1\rangle, \quad |\phi_2\rangle \otimes |\phi_2\rangle$$

и объяснить результат.

(ii) Рассмотрим матрицы Паули

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти $\sigma_x \otimes \sigma_z$ и $\sigma_z \otimes \sigma_x$. Результат обсудить.

Решение 1. (i) Получаем

$$|\phi_1\rangle \otimes |\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|\phi_2\rangle \otimes |\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\phi_2\rangle \otimes |\phi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, с помощью стандартного базиса в $\mathbb{C}^2$ мы находим стандартный базис в $\mathbb{C}^4$.

(ii) Произведения будут равны

$$\sigma_x \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \sigma_z \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что $\sigma_x \otimes \sigma_z \neq \sigma_z \otimes \sigma_x$.

Задача 2. Дан ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^2$:

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ e^{-i\phi} \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Используя этот базис, найти базис в $\mathbb{C}^4$.

Решение 2. Базис в $\mathbb{C}^4$ имеет вид

$$\big\{|\psi_1\rangle\otimes|\psi_1\rangle, |\psi_1\rangle\otimes|\psi_2\rangle, |\psi_2\rangle\otimes|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\otimes|\psi_2\rangle\big\},$$

поскольку

$$\big(\langle\psi_j|\otimes\langle\psi_k|\big)\big(|\psi_m\rangle\otimes|\psi_n\rangle\big)=\delta_{jm}\delta_{kn},$$

где $j,k,m,n=1,2$.

Задача 3. Система n кубитов представляет собой конечномерное гильбертово пространство над комплексными числами размерности 2^n. Состояние $|\psi\rangle$ системы — это суперпозиция базовых состояний

$$|\psi\rangle=\sum_{j_1,j_2,\dots,j_n=0}^{1}c_{j_1,j_2,\dots,j_n}|j_1\rangle\otimes|j_2\rangle\otimes\dots|j_n\rangle.$$

В упрощенном виде это выражение записывается в виде

$$|\psi\rangle=\sum_{j_1,j_2,\dots,j_n=0}^{1}c_{j_1,j_2,\dots,j_n}|j_1j_2\dots j_n\rangle.$$

Рассмотрим состояние гильбертова пространства $\mathscr{H}=\mathbb{C}^4$ $(n=2)$ как частный случай.

$$|\psi\rangle=\frac{1}{2}\big(|0\rangle\otimes|0\rangle+|0\rangle\otimes|1\rangle+|1\rangle\otimes|0\rangle+|1\rangle\otimes|1\rangle\big)\equiv\frac{1}{2}\big(|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle+|11\rangle\big).$$

Может ли это двухкубитовое состояние быть представлено как тензорное произведение состояний отдельных кубитов?

Решение 3. Да может. Искомое представление есть:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle+|1\rangle\big)\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle+|1\rangle\big).$$

Задача 4. Однокубитовое *преобразование Уолша – Адамара* представляет собой унитарное отображение W, заданное в виде

$$W|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle+|1\rangle\big),\quad W|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle-|1\rangle\big).$$

А n-кубитовое преобразование Уолша – Адамара имеет вид

$$W_n := W \otimes W \otimes \ldots \otimes W \quad (n \text{ раз}).$$

Рассмотрим случай $n = 2$. Найти

$$W_2\big(|0\rangle \otimes |0\rangle\big).$$

Решение 4. Имеем

$$W_2\big(|0\rangle \otimes |0\rangle\big) = (W \otimes W)\big(|0\rangle \otimes |0\rangle\big) = W|0\rangle \otimes W|0\rangle.$$

Следовательно,

$$W_2\big(|0\rangle \otimes |0\rangle\big) = \frac{1}{2}\left(\big(|0\rangle + |1\rangle\big) \otimes \big(|0\rangle + |1\rangle\big)\right).$$

В результате получаем

$$W_2\big(|0\rangle \otimes |0\rangle\big) = \frac{1}{2}\big(|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle\big).$$

Преобразование W_2 генерирует линейную комбинацию всех состояний. Это в равной степени относится и к W_n.

Задача 5. Пусть A — матрица $m \times m$, и B — матрица $n \times n$. Матрицы заданы в поле $\mathbb{C}$. Предположим, что I_m, I_n — единичные матрицы $m \times m$ и $n \times n$ соответственно.

(i) Показать, что

$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B).$$

(ii) Показать, что

$$\operatorname{tr}(A \otimes I_n + I_m \otimes B) = n\operatorname{tr}(A) + m\operatorname{tr}(B).$$

Решение 5. (i) Кронекерово произведение матриц $A := (a_{ij})_{ij}$ и $B := (b_{kl})_{kl}$ определено в задаче 1. Таким образом,

$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jj}b_{kk} = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B).$$

(ii) Поскольку операция получения следа линейна и $\operatorname{tr} I_n = n$, находим

$$\operatorname{tr}(A \otimes I_n + I_m \otimes B) = \operatorname{tr}(A \otimes I_n) + \operatorname{tr}(I_m \otimes B) = n \operatorname{tr}(A) + m \operatorname{tr}(B).$$

Задача 6. Пусть A — произвольная матрица $n \times n$ на $\mathbb{C}$. Показать, что

$$\exp(A \otimes I_n) \equiv \exp(A) \otimes I_n. \qquad (1)$$

Решение 6. Используя разложение в ряд

$$\exp(A \otimes I_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A \otimes I_n)^k}{k!} =$$
$$= I_n \otimes I_n + \frac{1}{1!}(A \otimes I_n) + \frac{1}{2!}(A \otimes I_n)^2 + \frac{1}{3!}(A \otimes I_n)^3 + \ldots$$

и зная, что

$$(A \otimes I_n)^k = A^k \otimes I_n, \quad k \in \mathbb{N},$$

получаем (1).

Задача 7. Пусть A и B — произвольные матрицы $n \times n$ на $\mathbb{C}$, I_n — единичная матрица $n \times n$. Показать, что

$$\exp(A \otimes I_n + I_n \otimes B) \equiv \exp(A) \otimes \exp(B).$$

Решение 7. Доказательство этого тождества основывается на утверждении

$$[A \otimes I_n, I_n \otimes B] = 0,$$

в котором $[,]$ означает коммутатор, и

$$(A \otimes I_n)^r (I_n \otimes B)^s \equiv (A^r \otimes I_n)(I_n \otimes B^s) \equiv A^r \otimes B^s, \quad r, s \in \mathbb{N}.$$

Отсюда

$$\exp(A \otimes I_n + I_n \otimes B) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(A \otimes I_n + I_n \otimes B)^j}{j!} =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{j!} \binom{j}{k} (A \otimes I_n)^k (I_n \otimes B)^{j-k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{j!} \binom{j}{k} (A^k \otimes B^{j-k}) =$$
$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \right) \otimes \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right) =$$
$$= \exp(A) \otimes \exp(B).$$

Задача 8. Пусть A и B — произвольные матрицы $n \times n$ с элементами из $\mathbb{C}$. Доказать или опровергнуть равенство

$$e^{A \otimes B} = e^A \otimes e^B.$$

Решение 8. Очевидно, что это утверждение вообще говоря не верно Для примера рассмотрим случай, когда $A = B = I_n$. В этом случае

$$e^{A \otimes B} = e^{I_{n^2}}$$

и

$$e^A \otimes e^B = e^{I_n} \otimes e^{I_n} \neq e^{I_{n^2}}.$$

Задача 9. Пусть A — матрица $m \times m$, B — матрица $n \times n$, матрицы заданы в поле $\mathbb{C}$. Собственные значения и собственные векторы матрицы A обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$, а собственные значения и собственные векторы матрицы B — через $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ и $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Примем, что ϵ_1, ϵ_2 и ϵ_3 — вещественные параметры. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\epsilon_1 A \otimes B + \epsilon_2 A \otimes I_n + \epsilon_3 I_m \otimes B.$$

Решение 9. Будем считать, что $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$. Тогда

$$(A \otimes B)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = (A\mathbf{x}) \otimes (B\mathbf{y}),$$
$$(A \otimes I_n)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = (A\mathbf{x}) \otimes \mathbf{y},$$
$$(I_m \otimes B)(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \mathbf{x} \otimes (B\mathbf{y}).$$

Таким образом, собственные векторы матрицы равны

$$\mathbf{u}_j \otimes \mathbf{v}_k, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Соответствующие им собственные значения имеют вид

$$\epsilon_1 \lambda_j \mu_k + \epsilon_2 \lambda_j + \epsilon_3 \mu_k.$$

Задача 10. Пусть A и B — матрицы $n \times n$ в поле $\mathbb{C}$. *Скалярное произведение* можно задать в виде

$$\langle A, B \rangle := \operatorname{tr}(AB^\dagger).$$

Скалярное произведение порождает *норму*

$$\|A\|^2 = \langle A, A \rangle = \operatorname{tr}(AA^\dagger).$$

Ее называют *нормой Гильберта – Шмидта*.

(i) Рассмотрим *матрицы Дирака*

$$\gamma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислить $\langle \gamma_0, \gamma_1 \rangle$.

(ii) Пусть U — унитарная матрица $n \times n$. Найти $\langle UA, UB \rangle$.

(iii) Пусть C и D — матрицы $m \times m$ в поле $\mathbb{C}$. Найти $\langle A \otimes C,\, B \otimes D \rangle$.

Решение 10. (i) В результате вычислений получаем

$$\langle \gamma_0, \gamma_1 \rangle = \operatorname{tr}(\gamma_0 \gamma_1^\dagger) = 0.$$

(ii) Из выражения

$$\operatorname{tr}\big(UA(UB)^\dagger\big) = \operatorname{tr}(UAB^\dagger U^\dagger) = \operatorname{tr}(U^\dagger UAB^\dagger) = \operatorname{tr}(AB),$$

в котором используется *циклическая инвариантность* для следа матриц, следует, что

$$\langle UA, UB \rangle = \langle A, B \rangle.$$

Таким образом, скалярное произведение при унитарных преобразованиях инвариантно.

(iii) Зная, что

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\big((A \otimes C)(B \otimes D)^\dagger\big) &= \operatorname{tr}\big((A \otimes C)(B^\dagger \otimes D^\dagger)\big) = \\ &= \operatorname{tr}\big((AB^\dagger) \otimes (CD^\dagger)\big) = \\ &= \operatorname{tr}(AB^\dagger) \operatorname{tr}(CD^\dagger), \end{aligned}$$

находим
$$\langle A\otimes C, B\otimes D\rangle = \langle A, B\rangle\langle C, D\rangle.$$

Задача 11. Пусть T — некоторая матрица размера 4×4
$$T := \left(I_2\otimes I_2 + \sum_{j=1}^{3} t_j\sigma_j\otimes\sigma_j\right),$$
где σ_j, $j=1,2,3$ — спиновые матрицы Паули, и $-1\leqslant t_j\leqslant +1$, $j=1,2,3$. Найти T^2.

Решение 11. Имеем
$$T^2 = I_2\otimes I_2 + 2\sum_{j=1}^{3} t_j\sigma_j\otimes\sigma_j + \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} t_j t_k\sigma_j\sigma_k\otimes\sigma_j\sigma_k.$$

Зная, что
$$\begin{aligned}\sigma_1\sigma_2 &= i\sigma_3, & \sigma_2\sigma_1 &= -i\sigma_3,\\ \sigma_2\sigma_3 &= i\sigma_1, & \sigma_3\sigma_2 &= -i\sigma_1,\\ \sigma_3\sigma_1 &= i\sigma_2, & \sigma_1\sigma_3 &= -i\sigma_2\end{aligned}$$
и $\sigma_1^2 = I_2$, $\sigma_2^2 = I_2$, $\sigma_3^2 = I_2$, находим
$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} t_j t_k\sigma_j\sigma_k\otimes\sigma_j\sigma_k \equiv I_2\otimes I_2\sum_{j=1}^{3} t_j^2 - 2(t_1t_2\sigma_3\otimes\sigma_3 + t_2t_3\sigma_1\otimes\sigma_1 + t_3t_1\sigma_2\otimes\sigma_2).$$

Следовательно,
$$T^2 = (I_2\otimes I_2)\left(1+\sum_{j=1}^{3} t_j^2\right) + 2(t_1 - t_2t_3)\sigma_1\otimes\sigma_1 +$$
$$+ 2(t_2 - t_3t_1)\sigma_2\otimes\sigma_2 + 2(t_3 - t_1t_2)\sigma_3\otimes\sigma_3.$$

Задача 12. Пусть $\{|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |n-1\rangle\}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^n$. Будет ли состояние
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{j=0}^{n-2} |j\rangle\otimes|j+1\rangle + |n-1\rangle\otimes|0\rangle\right)$$

независимым от данного ортонормированного базиса? Доказать или опровергнуть.

Решение 12. Рассмотрим частный случай $\mathbb{R}^2$. Пусть

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь примем, что

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $|\psi\rangle$ зависит от выбранного базиса.

Задача 13. В гильбертовом пространстве произведений $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ *состояния Белла* имеют вид

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle\big), \qquad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(|0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle\big),$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle\big), \qquad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle\big)$$

и формируют ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{C}^4$. Набор $\big\{|0\rangle, |1\rangle\big\}$ представляет собой произвольный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^2$. Пусть

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} -e^{i\phi} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(i) Найти $|\Phi^+\rangle$, $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$, $|\Psi^-\rangle$ для данного базиса.

(ii) Рассмотреть частный случай, когда $\phi = 0$ и $\theta = 0$.

Решение 13. (i) Для данного базиса получаем

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{2i\phi} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{2i\phi}\cos(2\theta) \\ e^{i\phi}\sin(2\theta) \\ e^{i\phi}\sin(2\theta) \\ -\cos(2\theta) \end{pmatrix},$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -e^{2i\phi}\sin(2\theta) \\ e^{i\phi}\cos(2\theta) \\ e^{i\phi}\cos(2\theta) \\ \sin(2\theta) \end{pmatrix}, \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\phi} \\ -e^{i\phi} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Нулевые значения ϕ и θ просто означают выбор стандартного базиса (т. е. $|0\rangle = (1\ 0)^T$ и $|1\rangle = (0\ 1)^T$). Отсюда видно, что состояния Белла имеют вид

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 14. Пусть $\mathscr{H}_A$ и $\mathscr{H}_B$ — два p-мерных гильбертовых пространства над полем $\mathbb{C}$, причем p — простое число. Примем, что

$$\{|0_A\rangle, |1_A\rangle, \ldots, |(p-1)_A\rangle\},$$
$$\{|0_B\rangle, |1_B\rangle, \ldots, |(p-1)_B\rangle\}$$

— ортонормированные базисы в этих гильбертовых пространствах. Определим состояния

$$|\psi(a,b)\rangle := I_p \otimes X^a Z^b \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j=0}^{p-1} |j_A\rangle \otimes |j_B\rangle$$

в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$, где $a, b \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Матрицы X и Z размера $p \times p$ имеют вид

$$X|j\rangle = |j + 1 \bmod p\rangle, \quad Z|j\rangle = \omega^j |j\rangle, \quad j = 0, 1, \ldots, p$$

с комплексным первообразным p-м корнем ω из 1. А множество $\{|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |p-1\rangle\}$ представляет собой ортонормированный базис, заданный для гильбертова пространства $\mathscr{H}_B$. Вычислить $|\psi(0,0)\rangle$ и $|\psi(1,1)\rangle$.

Решение 14. Из условий

$$X^0 = Z^0 = I_p, \quad I_p|j_A\rangle = |j_A\rangle, \quad I_p|j_B\rangle = |j_B\rangle$$

находим

$$|\psi(0,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j=0}^{p-1} |j_A\rangle \otimes |j_B\rangle.$$

Используя соотношения

$$\begin{aligned}(I_p \otimes XZ)\big(|j_A\rangle \otimes |j_B\rangle\big) &= |j_A\rangle \otimes \big(XZ|j_B\rangle\big) = \\ &= |j_A\rangle \otimes \omega^j X|j_B\rangle = \\ &= |j_A\rangle \otimes \omega^j |j_B + 1 \bmod p\rangle = \\ &= \omega^j |j_A\rangle \otimes |j_B + 1 \bmod p\rangle,\end{aligned}$$

находим

$$|\psi(1,1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j=0}^{p-1} \omega^j |j_A\rangle \otimes |j_B + 1 \bmod p\rangle.$$

В гильбертовом пространстве $\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$ состояния $|\psi(a,b)\rangle$ являются максимально запутанными.

Глава 3
Свойства матриц

В конечномерных квантовых системах разложение матриц по сингулярным значениям (singular value decomposition (svd)), а также спектральное (spectral) и полярное (polar) разложения играют важную роль. Кроме того, необходимо знать норму, собственные значения, векторы и ранг Шмидта.

Задача 1. Пусть A и B — две матрицы $n \times n$ в поле $\mathbb{C}$. Матрицы A и B называют *подобными*, если существует несингулярная матрица X размера $n \times n$ такая, что

$$A = XBX^{-1}.$$

Показать, что спектры (собственные значения) двух подобных матриц равны.

Решение 1. Для A и B можно записать

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I_n) &= \det(XBX^{-1} - X\lambda I_n X^{-1}) = \\ &= \det\bigl(X(B - \lambda I_n)X^{-1}\bigr) = \\ &= \det(X)\det(B - \lambda I_n)\det(X^{-1}) = \\ &= \det(B - \lambda I_n).\end{aligned}$$

Задача 2. Пусть A — матрица $n \times n$ с элементами из $\mathbb{C}$. Тогда существует унитарная матрица Q размера $n \times n$ такая, что

$$Q^* A Q = D + N,$$

где $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ — диагональная матрица, составленная из собственных значений A, и N — строго верхняя треугольная матрица (то есть N имеет нулевые значения на диагонали). О матрице Q говорят, что она осуществляет *разложение Шура* матрицы A.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -1 & -2i \end{pmatrix}.$$

Показать, что матрица Q обеспечивает разложение Шура матрицы A.

Решение 2. Очевидно, что

$$Q^*Q = QQ^* = I_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Q^*AQ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -1 & -2i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3+4i & -6 \\ 0 & 3-4i \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3+4i & 0 \\ 0 & 3-4i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В результате мы получили разложение Шура матрицы A с использованием данной матрицы Q.

Задача 3. Рассмотрим квадратную несингулярную матрицу A с элементами из $\mathbb{C}$. В соответствии с *теоремой полярного разложения* матрица A может быть записана в виде

$$A = UP,$$

где U — унитарная матрица, и P — эрмитовая положительно определенная матрица. Показать, что матрица A имеет единственное полярное разложение.

Решение 3. Матрица A является обратимой, как и матрицы A^* и A^*A. Положительный квадратный корень P из A^*A также обратим. Примем, что $U := AP^{-1}$. Тогда матрица U — обратима и

$$U^*U = P^{-1}A^*AP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = I,$$

то есть U — унитарная. А так как матрица P обратима, очевидно, что AP^{-1} — единственно возможный выбор U.

Задача 4. Пусть A — произвольная матрица $m \times n$ в поле $\mathbb{R}$, то есть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Тогда A можно записать в виде

$$A = U\Sigma V^T,$$

где U — ортогональная матрица $m \times m$, V — ортогональная матрица $n \times n$, Σ — диагональная матрица $m \times n$ с неотрицательными элементами, и верхний индекс ^{T} означает транспонирование. Эта операция называется *разложением по сингулярным значениям*. Алгоритм для его нахождения следующий.

1) Найти собственные значения λ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ матрицы $A^T A$ размера $n \times n$. Расположить собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ в убывающем порядке.

2) Найти количество ненулевых собственных значений матрицы $A^T A$. Обозначим это число r.

3) Найти ортонормированные собственные векторы матрицы $A^T A$, соответствующие найденным собственным значениям, и расположить их в том же порядке для формирования вектор-столбцов матрицы V размера $n \times n$.

4) Построить диагональную матрицу Σ размера $m \times n$, размещая на ее главной диагонали квадратный корень $\sigma_j := \sqrt{\lambda_j}$ из $p = \min(m, n)$ первых собственных значений матрицы $A^T A$, найденных в пункте 1). Корни расположить в порядке убывания.

5) Найти первые r вектор-столбцов матрицы U размера $m \times m$,

$$\mathbf{u}_j = \frac{1}{\sigma_j} A \mathbf{v}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r.$$

6) Добавить к матрице U оставшиеся $(m - r)$ векторов, используя процесс ортогонализации Грамма–Шмидта.

Применить данный алгоритм к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение 4. 1) Находим матрицу $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Записываем собственные значения в убывающем порядке: $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 1$.

2) Количество ненулевых собственных значений $r = 2$.

3) Находим ортонормированные собственные векторы матрицы $A^T A$, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Получаем матрицу V размера 2×2 (матрица V^T получается транспонированием):

$$V = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

4) Из собственных значений строим сингулярную матрицу 3×2

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

на главной диагонали которой располагаются квадратные корни собственных значений матрицы $A^T A$ (в убывающем порядке). Остальные элементы Σ равны нулю.

5) Далее находим два вектор-столбца матрицы U размера 3×3. Используя данные выше уравнения, вычисляем

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

6) Для нахождения вектора $\mathbf{u}_3$ применим *процесс Грамма – Шмидта*. Вектор $\mathbf{u}_3$ перпендикулярен векторам $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$. Тогда

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 - (\mathbf{u}_1^T \mathbf{e}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2^T \mathbf{e}_1)\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}^T.$$

Нормируя этот вектор, получим

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/3 & 0 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

Мы получили разложение матрицы A по сингулярным значениям.

Замечание. Известно, что

$$A\mathbf{v}_j = \sigma_j \mathbf{u}_j, \quad A^T \mathbf{u}_j = \sigma_j \mathbf{v}_j.$$

Следовательно,

$$A^T A\mathbf{v}_j = \sigma_j^2 \mathbf{v}_j, \quad AA^T \mathbf{u}_j = \sigma_j^2 \mathbf{u}_j.$$

Задача 5. Найти все попарно ортонормированные векторы (векторы-столбцы). Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbb{R}^4$. Найти все пары ортонормированных векторов (вектор-столбцов) $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$, элементы которых могут быть только $+1$ и -1. Рассчитать матрицу

$$\sum_{j=1}^{p} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T$$

и найти ее собственные значения и собственные векторы.

Решение 5. Число p не может превышать 4, так как это означало бы, что $\dim(\mathbb{R}^4) > 4$. Решение имеет вид

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{4} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Собственное значение равно 4 и имеет кратность 4. Все собственные векторы $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Другим решением является набор

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Рассмотрим матрицу 4×4 (гамильтониан)

$$\widehat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\sigma_x \otimes \sigma_x - \sigma_y \otimes \sigma_y),$$

где ω — частота. Найти *норму* $\widehat{H}$, то есть

$$\|\widehat{H}\| := \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\widehat{H}\mathbf{x}\|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^4.$$

Решение 6. Существует два способа нахождения нормы $\widehat{H}$. В первом используется *метод множителей Лагранжа*, где ограничивающее условие $\|\mathbf{x}\| = 1$ можно записать в виде

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

Зная, что

$$\sigma_x \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\widehat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{C}^4$. Найдем максимум величины

$$f(\mathbf{x}) := \|\widehat{H}\mathbf{x}\|^2 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1),$$

где λ — *множитель Лагранжа*. Чтобы найти экстремумы, решим уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2\hbar^2\omega^2 x_1 - 2\lambda x_1 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2\lambda x_2 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = -2\lambda x_3 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = 2\hbar^2\omega^2 x_4 - 2\lambda x_4 = 0$$

совместно с ограничивающим условием $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. Уравнения можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \hbar^2\omega^2 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hbar^2\omega^2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda = 0$, то $x_1 = x_4 = 0$ и $\|\widehat{H}\mathbf{x}\| = 0$. Это минимум функции. В случае когда $\lambda \neq 0$, имеем $x_2 = x_3 = 0$ и $x_1^2 + x_4^2 = 1$, поэтому $\|\widehat{H}\mathbf{x}\| = \hbar\omega$, что является максимумом функции. Таким образом, получаем $\|\widehat{H}\| = \hbar\omega$.

Во втором способе вычисляется $\widehat{H}^*\widehat{H}$ и находится квадратный корень из наибольшего собственного значения. Так как $H^* = H$, получим

$$\widehat{H}^*\widehat{H} = \hbar^2\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, максимальное собственное значение равно $\hbar^2\omega^2$ (дважды вырожденное) и $\|\widehat{H}\| = \hbar\omega$.

Задача 7. Пусть A и B — эрмитовы матрицы $n \times n$. Допустим, что

$$A^2 = I_n, \quad B^2 = I_n \tag{1}$$

и

$$[A, B]_+ \equiv AB + BA = 0_n, \tag{2}$$

где 0_n — нулевая матрица $n \times n$. Пусть вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ нормированный, то есть $\|\mathbf{x}\| = 1$. В данном случае предполагается, что $\mathbf{x}$ — вектор-столбец.

(i) Показать, что

$$(\mathbf{x}^* A\mathbf{x})^2 + (\mathbf{x}^* B\mathbf{x})^2 \leqslant 1. \tag{3}$$

(ii) Привести примеры матриц A и B.

Решение 7. (i) Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $r^2 := a^2 + b^2$. Матрица

$$C = aA + bB$$

также будет эрмитовой. Тогда

$$C^2 = a^2 A^2 + abAB + baBA + b^2 B^2.$$

Используя свойства (1) и (2), найдем

$$C^2 = a^2 I_n + b^2 I_n = r^2 I_n.$$

Следовательно,

$$(\mathbf{x}^* C^2 \mathbf{x}) = r^2$$

и

$$-r \leqslant a(\mathbf{x}^* A\mathbf{x}) + b(\mathbf{x}^* B\mathbf{x}) \leqslant r.$$

Пусть

$$a = \mathbf{x}^* A\mathbf{x}, \quad b = \mathbf{x}^* B\mathbf{x}.$$

В этом случае

$$a^2 + b^2 \leqslant r$$

или $r^2 \leqslant r$. Отсюда $r \leqslant 1$ и $r^2 \leqslant 1$, из чего следует (3).

(ii) Примером могут служить матрицы $A = \sigma_x$ и $B = \sigma_y$, так как $\sigma_x^2 = I_2$, $\sigma_y^2 = I_2$ и $\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 0_2$.

Задача 8. Пусть A и B — эрмитовы матрицы $n \times n$. Предположим, что

$$A^2 = A, \quad B^2 = B \tag{1}$$

и

$$[A, B]_+ \equiv AB + BA = 0_n, \tag{2}$$

где 0_n — нулевая матрица $n \times n$. Будем считать, что вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ нормирован, то есть $\|\mathbf{x}\| = 1$. В данном случае предполагается, что $\mathbf{x}$ — вектор-столбец. Показать, что

$$(\mathbf{x}^* A\mathbf{x})^2 + (\mathbf{x}^* B\mathbf{x})^2 \leqslant 1. \tag{3}$$

Решение 8. Для произвольной эрмитовой матрицы M размера $n \times n$ можно записать

$$0 \leqslant \left(\mathbf{x}^* \left(M - (\mathbf{x}^* M\mathbf{x}) I_n\right)^2 x\right) = \left(\mathbf{x}^* \left(M^2 - 2(\mathbf{x}^* M\mathbf{x})M + (\mathbf{x}^* M\mathbf{x})^2 I_n\right)\mathbf{x}\right) =$$
$$= (\mathbf{x}^* M^2\mathbf{x}) - 2(\mathbf{x}^* M\mathbf{x})^2 + (\mathbf{x}^* M\mathbf{x})^2 = (\mathbf{x}^* M^2\mathbf{x}) - (\mathbf{x}^* M\mathbf{x})^2.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant (\mathbf{x}^* M^2\mathbf{x}) - (\mathbf{x}^* M\mathbf{x})^2$$

или

$$(\mathbf{x}^* M\mathbf{x})^2 \leqslant (\mathbf{x}^* M^2\mathbf{x}).$$

Таким образом, для $A = M$, используя (1), получим

$$(\mathbf{x}^* A\mathbf{x})^2 \leqslant \mathbf{x}^* A\mathbf{x},$$

а значит,

$$0 \leqslant (\mathbf{x}^* A\mathbf{x}) \leqslant 1.$$

Таким же образом находим

$$0 \leqslant (\mathbf{x}^* B\mathbf{x}) \leqslant 1.$$

Введем величины $a, b \in \mathbb{R}$, $r^2 := a^2 + b^2$ и

$$C := aA + bB.$$

Тогда

$$C^2 = a^2 A^2 + b^2 B^2 + abAB + baBA.$$

Используя (1) и (2), получаем

$$C^2 = a^2 A + b^2 B.$$

Поэтому

$$(\mathbf{x}^* C\mathbf{x})^2 \leqslant (\mathbf{x}^* C^2\mathbf{x}) \leqslant a^2 + b^2.$$

Полагая
$$a := (\mathbf{x}^* A\mathbf{x}), \quad b := (\mathbf{x}^* B\mathbf{x}),$$
получим
$$(\mathbf{x}^* C\mathbf{x}) = a^2 + b^2 = r^2.$$
Следовательно, $(r^2)^2 \leqslant r^2$, и значит, $r^2 \leqslant 1$, откуда следует (3).

Задача 9. Пусть $\mathscr{H}_A$ и $\mathscr{H}_B$ — два конечномерных гильбертовых пространства. *Ранг Шмидта* линейного оператора $L\colon \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B \to \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$ на пространстве $\mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$ — это наименьшее неотрицательное целое число $\mathrm{Sch}(L, \mathscr{H}_A, \mathscr{H}_B)$ такое, что L может быть записан в виде
$$L = \sum_{j=1}^{\mathrm{Sch}(L,\mathscr{H}_A,\mathscr{H}_B)} L_{j,A} \otimes L_{j,B},$$
где величины $L_{j,A}\colon \mathscr{H}_A \to \mathscr{H}_A$ и $L_{j,B}\colon \mathscr{H}_B \to \mathscr{H}_B$ являются линейными операторами.

Пусть $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{C}^2$. Найти ранг Шмидта $\mathrm{Sch}(U_{CNOT}, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ и $\mathrm{Sch}(U_{SWAP}, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$, где
$$U_{CNOT} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 11|,$$
$$U_{SWAP} = |00\rangle\langle 00| + |10\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|.$$

Решение 9. Отметим, что
$$U_{CNOT} = |0\rangle\langle 0| \otimes I_2 + |1\rangle\langle 1| \otimes U_{NOT},$$
где
$$U_{NOT} := |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|.$$
Другими словами,
$$0 < \mathrm{Sch}(U_{CNOT}, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \leqslant 2.$$
Теперь предположим, что U_{CNOT} можно записать как произведение $A \otimes B$, причем
$$A := a_0|0\rangle\langle 0| + a_1|0\rangle\langle 1| + a_2|1\rangle\langle 0| + a_3|1\rangle\langle 1|,$$
$$B := b_0|0\rangle\langle 0| + b_1|0\rangle\langle 1| + b_2|1\rangle\langle 0| + b_3|1\rangle\langle 1|.$$

Отсюда вытекают условия $a_0b_0 = 1$, $a_0b_1 = 0$ и $a_3b_1 = 1$. Данные уравнения несовместны, то есть

$$\mathrm{Sch}(U_{CNOT}, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) \neq 1.$$

Поэтому

$$\mathrm{Sch}(U_{CNOT}, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) = 2.$$

Оператор U_{SWAP} имеет собственное значение 1 (кратности три) с соответствующими ортонормированными собственными векторами

$$\left\{ |00\rangle, |11\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle + |10\rangle\big) \right\}$$

и собственное значение -1 с соответствующим собственным вектором $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle - |10\rangle\big)$. Определяя

$$|\phi_1\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle + |10\rangle\big),$$

$$|\phi_2\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle - |10\rangle\big),$$

находим:

$$U_{SWAP} = |00\rangle\langle 00| + |\phi_1\rangle\langle\phi_1| - |\phi_2\rangle\langle\phi_2| + |11\rangle\langle 11|,$$

где совокупность $\big\{|00\rangle, |\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |11\rangle\big\}$ образует ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{C}^4$. В этом базисе оператор U_{SWAP} представляет собой диагональную матрицу

$$U_{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что матрицы

$$|00\rangle\langle 00|,\ |11\rangle\langle 11|,\ |\phi_1\rangle\langle\phi_1| \text{ и } |\phi_2\rangle\langle\phi_2|$$

линейно независимы. Поэтому

$$\mathrm{Sch}(U_{SWAP}, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) = 4.$$

Задача 10. Дано произведение двух конечномерных гильбертовых пространств $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ ($\dim \mathscr{H}_1 = m$, $\dim \mathscr{H}_2 = n$), причем $\mathscr{H}_1 = \mathbb{C}^m$ и $\mathscr{H}_2 = \mathbb{C}^n$. *Операторное разложение Шмидта* линейного оператора Q, действующего в пространстве $\mathscr{H}$, может быть построено следующим образом. Пусть X и Y — матрицы $d \times d$ в поле $\mathbb{C}$. В этом случае мы можем найти скалярное произведение $\langle X, Y \rangle := \mathrm{tr}(XY^\dagger)$. Используя это произведение, нетрудно определить ортонормальное множество матриц $d \times d$ $\{X_j : j = 1, 2, \ldots, d^2\}$, которое удовлетворяет условию

$$\langle X_j, X_k \rangle = \mathrm{tr}(X_j X_k^\dagger) = \delta_{jk}.$$

Следовательно, матрицу Q можно записать в виде

$$Q = \sum_{j=1}^{m^2} \sum_{k=1}^{n^2} c_{jk} A_j \otimes B_k,$$

где $\{A_j : j = 1, 2, \ldots, m^2\}$ и $\{B_k : k = 1, 2, \ldots, n^2\}$ — фиксированные ортонормированные базисы матриц $m \times m$ и $n \times n$ в гильбертовых пространствах $\mathbb{C}^m$ и $\mathbb{C}^n$ соответственно; c_{jk} — комплексные коэффициенты. Таким образом, матрица $C = (c_{jk})$ (при $j = 1, 2, \ldots, m^2$ и $k = 1, 2, \ldots, n^2$) представляет собой матрицу $m^2 \times n^2$. Теорема о разложении по сингулярным значениям утверждает, что C можно записать в виде

$$C = U \Sigma V^\dagger,$$

где U — унитарная матрица $m^2 \times m^2$, V — унитарная матрица $n^2 \times n^2$, и Σ — диагональная матрица $m^2 \times n^2$, причем Σ имеет вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & s_{n^2} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что C, U и V вычисляются в ортонормированных базисах, например, в стандартном базисе. Отсюда получаем

$$Q = \sum_{j=1}^{m^2} \sum_{k=1}^{n^2} \sum_{l=1}^{n^2} U_{jl} s_l V_{lk} A_j \otimes B_k.$$

Здесь через s_l обозначен l-й диагональный элемент диагональной матрицы Σ размера $m^2 \times n^2$. Определив

$$H_l = \sum_{j=1}^{m^2} U_{jl} A_j,$$

$$K_l = \sum_{k=1}^{n^2} V_{lk} B_k,$$

где $l = 1, 2, \ldots, n^2$, находим операторное разложение Шмидта

$$Q = \sum_{l=1}^{n^2} s_l H_l \otimes K_l.$$

(i) Рассмотрим логический вентиль $CNOT$

$$U_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти операторное разложение Шмидта матрицы U_{CNOT}.

(ii) Рассмотрим оператор $SWAP$

$$U_{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти операторное разложение Шмидта U_{SWAP}.

(iii) Пусть

$$Z = \left(\sqrt{1-p} I_2 \otimes I_2 + i\sqrt{p} \sigma_x \otimes \sigma_x\right) \left(\sqrt{1-p} I_2 \otimes I_2 + i\sqrt{p} \sigma_z \otimes \sigma_z\right),$$

где σ_x, σ_y и σ_z — спиновые матрицы Паули. Найти операторное разложение Шмидта Z.

Решение 10. (i) Для U_{CNOT} получим

$$U_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \sigma_x.$$

(ii) Для U_{SWAP} разложение по оператору Шмидта будет иметь вид

$$U_{SWAP} = \frac{1}{2}(I_2 \otimes I_2 + \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z).$$

(iii) Разложение для Z имеет вид

$$Z = (1-p)I_2 \otimes I_2 + p\sigma_y \otimes \sigma_y + \sqrt{p(1-p)}\left[\left(e^{i\pi/4}\sigma_x\right) \otimes \sigma_x + \left(e^{i\pi/4}\sigma_z\right) \otimes \sigma_z\right].$$

Задача 11. Пусть A, B — матрицы $n \times n$ в поле $\mathbb{C}$. Допустим,

$$\big[A, [A, B]\big] = \big[B, [A, B]\big] = 0. \tag{1}$$

Показать, что

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}, \tag{2a}$$

$$e^{A+B} = e^B e^A e^{+\frac{1}{2}[A,B]}. \tag{2b}$$

Решение 11. Воспользуемся *методом дифференцирования по параметру*. Рассмотрим матричнозначную функцию

$$f(\epsilon) = e^{\epsilon A} e^{\epsilon B},$$

в которой ϵ является вещественным параметром. Продифференцировав выражение по ϵ, получим

$$\frac{df}{d\epsilon} = Ae^{\epsilon A}e^{\epsilon B} + e^{\epsilon A}e^{\epsilon B}B = (A + e^{\epsilon A}Be^{-\epsilon A})f(\epsilon),$$

так как $e^{\epsilon A}e^{-\epsilon A} = I_n$. С учетом (1) запишем

$$e^{\epsilon A}Be^{-\epsilon A} = B + \epsilon[A, B].$$

В результате мы получили дифференциальное уравнение

$$\frac{df}{d\epsilon} = \big((A + B) + \epsilon[A, B]\big)f(\epsilon).$$

Так как матрица $A+B$ коммутирует с $[A, B]$, можно считать $A+B$ и $[A, B]$ простыми коммутирующими переменными и проинтегрировать это линейное дифференциальное уравнение при начальных условиях

$$f(0) = I_n.$$

Получим выражение

$$f(\epsilon) = e^{\epsilon(A+B)+(\epsilon^2/2)[A,B]} = e^{\epsilon(A+B)}e^{(\epsilon^2/2)[A,B]},$$

в котором последнее произведение следует из условия, что $A+B$ коммутирует с $[A, B]$. Если принять, что $\epsilon = 1$ и умножить обе части на $e^{-[A,B]/2}$, получим равенство (2a). Таким же образом можно доказать (2b).

Задача 12. Пусть A — матрица $n \times n$. Предположим, что существует матрица, обратная к A. Она может быть найдена следующим способом (*алгоритм Шанки* (Csanky)). Пусть

$$p(x) := \det(xI_n - A), \tag{1}$$

где I_n — единичная матрица $n \times n$. Корнями по определению являются собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A. Запишем

$$p(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n. \tag{2}$$

Здесь

$$c_n = (-1)^n \det A.$$

матрица A является несингулярной, следовательно, $c_n \neq 0$ и наоборот. В соответствии с *теоремой Кэли–Гамильтона*

$$p(A) = A^n + c_1 A^{n-1} + \ldots + c_{n-1}A + c_n I_n = 0. \tag{3}$$

Умножив это уравнение на A^{-1}, получим

$$A^{-1} = \frac{1}{-c_n}(A^{n-1} + c_1 A^{n-2} + \ldots + c_{n-1}I_n). \tag{4}$$

Зная коэффициенты c_j, можно найти матрицу, обратную к A. Обозначим

$$s_k := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k.$$

Тогда s_j и c_j удовлетворяют следующей нижней треугольной системе линейных уравнений $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_{n-2} & \dots & s_1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_1 \\ -s_2 \\ -s_3 \\ \vdots \\ -s_n \end{pmatrix}.$$

Из условия

$$\mathrm{tr}(A^k) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k = s_k$$

находим s_k при $k = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, линейное уравнение может быть разрешено относительно c_j. Наконец, используя (4), получаем матрицу, обратную к A. Применить алгоритм Шанки для матрицы 4×4

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение 12. Учитывая, что

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и $U^4 = I_4$, найдем

$$\mathrm{tr}\, U = 0 = s_1, \quad \mathrm{tr}\, U^2 = 0 = s_2, \quad \mathrm{tr}\, U^3 = 0 = s_3, \quad \mathrm{tr}\, U^4 = 4 = s_4.$$

Получаем систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

решением которой являются величины

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = -1.$$

Следовательно, обратная матрица имеет вид

$$U^{-1} = U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 13. Пусть

$$J^+ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^- := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Предположим, что $\epsilon \in \mathbb{R}$. Найти

$$e^{\epsilon J^+}, \quad e^{\epsilon J^-}, \quad e^{\epsilon(J^+ + J^-)}.$$

(ii) Предположим, что $r \in \mathbb{R}$. Показать, что

$$e^{r(J^+ + J^-)} \equiv e^{J^- \operatorname{th}(r)} e^{2J_3 \ln\left(\operatorname{ch}(r)\right)} e^{J^+ \operatorname{th}(r)}.$$

Решение 13. (i) Разложив матрицу A размера $n \times n$ в ряд

$$\exp(\epsilon A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon^j A^j}{j!},$$

получим

$$e^{\epsilon J^+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{\epsilon J^-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$e^{\epsilon(J^+ + J^-)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{ch}(\epsilon) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \operatorname{sh}(\epsilon).$$

(ii) По результатам (i) можно получить искомое тождество.

Задача 14. *Коммутационное соотношение Гейзенберга* ($\hbar = 1$) может быть записано в виде

$$[\widehat{p}, \widehat{q}] = -iI,$$

где $\widehat{p} := -i\partial/\partial q$, I — тождественный оператор. Пусть α, $\beta \in \mathbb{R}$ и

$$U(\alpha) = \exp(i\alpha\widehat{p}), \quad V(\beta) = \exp(i\beta\widehat{q}).$$

Тогда, применив формулу Кэмпбелла – Хаусдорфа, найдем

$$U(\alpha)V(\beta) = \exp(i\alpha\beta)V(\beta)U(\alpha).$$

Полученная зависимость называется *представлением Вейля* коммутационного соотношения Гейзенберга. Существует ли возможность найти конечномерные унитарные матрицы $n \times n$ U $(U \neq I_n)$ и V $(V \neq I_n)$ такие, что

$$UV = \zeta VU$$

при $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$, причем U и V не должны быть единичными матрицами?

Решение 14. Такие матрицы могут быть найдены, а именно матрица перестановок

$$U := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и диагональная матрица

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \zeta^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Задача 15. Пусть U — некоторая унитарная матрица $n \times n$

$$U := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

а V — унитарная диагональная матрица $n \times n$ ($\zeta \in \mathbb{C}$)

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \zeta^{n-1} \end{pmatrix},$$

в которой $\zeta^n = 1$. В этом случае множество матриц

$$\{U^j V^k : j, k = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

образует базис в гильбертовом пространстве для всех матриц $n \times n$ со *скалярным произведением*

$$\langle A, B \rangle := \frac{1}{n} \operatorname{tr}(AB^*)$$

для матриц $n \times n$ A и B. Записать базис при $n = 2$.

Решение 15. При $n = 2$ получаем комбинации

$$(jk) \in \big\{(00), (01), (10), (11)\big\}.$$

Ортонормированный базис имеет вид

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad -i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 16. Пусть A и B — матрицы $n \times n$ в поле $\mathbb{C}$. Показать, что матрицы AB и BA имеют одинаковый набор собственных значений.

Решение 16. Рассмотрим первый случай, когда матрица A обратима. При этом

$$AB = A(BA)A^{-1}.$$

Следовательно, матрицы AB и BA подобны, и значит, имеют одинаковые множества собственных значений. Если матрица A сингулярная, воспользуемся *доказательством, использующим свойство непрерывности*: рассмотрим матрицу $A + \epsilon I_n$. Выбираем некоторое $\delta > 0$ такое, чтобы $A + \epsilon I_n$ была обратимой при всех ϵ, $0 < \epsilon < \delta$. Тогда $(A + \epsilon I_n)B$ и $B(A + \epsilon I_n)$ имеют одинаковые множества собственных значений для всех $\epsilon \in (0, \delta)$. Приравняв их характеристические многочлены, получим

$$\det\big(\lambda I_n - (A + \epsilon I_n)B\big) = \det\big(\lambda I_n - B(A + \epsilon I_n)\big), \quad 0 < \epsilon < \delta.$$

Так как обе части представляют собой непрерывные (даже аналитические) функции от ϵ, то, переходя к пределу $\epsilon \to 0^+$, получим

$$\det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda I_n - BA).$$

Задача 17. *Область числовых значений* (или *поле значений*) матрицы A размера $n \times n$ с элементами из поля комплексных чисел имеет вид

$$W(A) := \{\mathbf{x}^* A\mathbf{x} \colon \|\mathbf{x}\| = 1,\ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n\}.$$

(i) Найти область числовых значений матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Найти область числовых значений матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение 17. (i) Очевидно, что область числовых значений будет представлять собой единичный интервал $[0, 1]$.

(ii) В данном случае область числовых значений $W(A)$ имеет вид замкнутого эллиптического диска с фокусами в точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$, малой осью 1 и большой осью $\sqrt{2}$.

Теорема о выпуклости Теплица–Хаусдорфа гласит, что область числовых значений квадратной матрицы представляет собой выпуклое компактное подмножество комплексной плоскости.

Задача 18. Дана *циркулянтная матрица* C размера $n \times n$

$$C := \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{pmatrix}.$$

Примером циркулянтной матрицы является матрица

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее также называют *первичной матрицей перестановок* $n \times n$.

(i) Пусть C и P — матрицы, указанные выше, и

$$f(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_{n-1}\lambda^{n-1}.$$

Показать, что $C = f(P)$.

(ii) Показать, что C является *нормальной матрицей*, то есть

$$C^*C = CC^*.$$

(iii) Показать, что собственные значения C равны $f(\omega^k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, где ω — n-й первообразный корень единицы.

(iv) Показать, что

$$\det(C) = f(\omega^0)f(\omega^1)\ldots f(\omega^{n-1}).$$

(v) Показать, что матрица F^*CF является диагональной, причем F — унитарная матрица, элемент (j,k) которой равен

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{(j-1)(k-1)}, \quad j,k = 1, \ldots, n.$$

Решение 18. (i) Непосредственное вычисление

$$f(P) = c_0I_n + c_1P + c_2P^2 + \ldots + c_{n-1}P^{n-1}$$

дает матрицу C, где I_n — единичная матрица $n\times n$, а $P^2, P^3, \ldots, P^{n-1}$ — матрицы перестановок.

(ii) Известно, что $PP^* = P^*P$. Если две матрицы A и B размера $n \times n$ коммутируют, то коммутируют и многочлены $g(A)$ и $h(B)$, следовательно, матрица C является нормальной.

(iii) Характеристический многочлен матрицы P имеет вид

$$\det(\lambda I_n - P) = \lambda^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(\lambda - \omega^k).$$

Таким образом, собственные значения матриц P и P^j соответственно равны ω^k и ω^{jk} при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Отсюда следует, что собственные значения матрицы $C = f(P)$ равны $f(\omega^k)$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

(iv) Зная результат (iii), находим

$$\det(C) = \prod_{k=0}^{n-1} f(\omega^k).$$

(v) Для всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$ обозначим

$$\mathbf{x}_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{(n-1)k})^T,$$

где верхний индекс ^{T} означает транспонирование. Следовательно,

$$P\mathbf{x}_k = (\omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{(n-1)k}, 1)^T = \omega^k \mathbf{x}_k$$

и

$$C\mathbf{x}_k = f(P)\mathbf{x}_k = f(\omega^k)\mathbf{x}_k.$$

Таким образом, векторы $\mathbf{x}_k$ являются собственными векторами матриц P и C, соответствующие собственным значениям ω^k и $f(\omega^k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Из условия, что

$$\langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k \rangle \equiv \mathbf{x}_j^* \mathbf{x}_k = \sum_{l=0}^{n-1} \overline{\omega^{kl}} \omega^{jl} = \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{(j-k)l} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ n, & j = k, \end{cases}$$

находим, что векторы

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{x}_0, \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{x}_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{x}_{n-1} \right\}$$

образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^n$. Таким образом, получаем унитарную матрицу

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & , \ldots, & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \ldots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \ldots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

такую, что

$$F^* C F = \mathrm{diag}\big(f(\omega^0), f(\omega^1), \ldots, f(\omega^{n-1})\big).$$

Матрица F унитарна и носит название *матрицы Фурье*.

Задача 19. Матрицу A размера $n \times n$ называют *матрицей Адамара*, если каждый ее элемент равен 1 или -1 и если ее строки или столбцы ортогональны, то есть

$$AA^T = nI_n \quad \text{или} \quad A^T A = nI_n.$$

Отметим, что равенства $AA^T = nI_n$ и $A^TA = nI_n$ равнозначны. Матрицы Адамара H_n порядка 2^n могут быть образованы рекурсивно по определению

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_n = \begin{pmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{pmatrix}$$

при $n \geqslant 2$. Показать, что собственные значения H_n равны $+2^{n/2}$ и $-2^{n/2}$ и кратность каждого равна 2^{n-1}.

Решение 19. Применим индукцию по n. Случай, когда $n = 1$, очевиден. При $n = 2$ можем записать

$$\det(\lambda I - H_n) = \begin{vmatrix} \lambda I - H_{n-1} & -H_{n-1} \\ -H_{n-1} & \lambda I + H_{n-1} \end{vmatrix} = \det\bigl((\lambda I - H_{n-1})(\lambda I + H_{n-1}) - H_{n-1}^2\bigr).$$

Таким образом,

$$\det(\lambda I - H_n) = \det(\lambda^2 I - 2H_{n-1}^2) = \det(\lambda I - \sqrt{2}H_{n-1})\det(\lambda I + \sqrt{2}H_{n-1}).$$

Полученное выражение показывает, что каждое собственное значение μ матрицы H_{n-1} порождает два собственных значения $\pm\sqrt{2}\mu$ матрицы H_n. Из этого по индукции следует, что матрица H_{n-1} имеет собственные значения $+2^{(n-1)/2}$ и $-2^{(n-1)/2}$, кратность каждого из которых 2^{n-2}.

Задача 20. Матрица A размера $n \times n$ называется *приводимой*, если существует матрица перестановок P такая, что

$$P^TAP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

где B и D — квадратные матрицы, порядок которых по крайней мере равен 1. Матрица A размера $n \times n$ называется *неприводимой*, если она не является приводимой. Показать, что первичная матрица перестановок $n \times n$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

является неприводимой.

Решение 20. Предположим, что матрица A приводима. Пусть

$$P^T AP = J_1 \oplus J_2 \oplus \ldots \oplus J_k, \quad k \geqslant 2,$$

где P — некоторая матрица перестановок, и J_j — неприводимые матрицы, порядок которых $< n$. Знак $\oplus$ означает прямую сумму. Ранг матрицы $A-I$ равен $n-1$, так как $\det(A - I) = 0$ и матрица порядка $n-1$, полученная в результате удаления из $A - I$ последних строки и столбца становится несингулярной. Следовательно,

$$\operatorname{rank}(P^T AP - I_n) = \operatorname{rank}\bigl(P^T(A - I_n)P\bigr) = n - 1.$$

Применив указанное выше разложение, находим

$$\operatorname{rank}(P^T AP - I_n) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{rank}(J_j - I_n) \leqslant (n - k) < (n - 1).$$

Получено противоречие, поэтому матрица A неприводима.

Задача 21. Пусть U — некоторая унитарная матрица $n \times n$. Тогда U можно записать в виде

$$U = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)V^*,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения U, и V — унитарная матрица $n\times n$. Пусть

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти разложение матрицы U, указанное выше.

Решение 21. Собственные значения U равны $+1$ и -1. В этом случае

$$U = V \operatorname{diag}(1, -1)V^*,$$

где

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $V = V^*$.

Задача 22. Матрицу A размера $n \times n$ на множестве комплексных чисел называют *неотрицательно определенной* (записывается как $A \geqslant 0$), если

$$\mathbf{x}^* A\mathbf{x} \geqslant 0 \quad \text{для всех } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n.$$

Показать, что для любой матрицы $A \geqslant 0$ существует единственная матрица $B \geqslant 0$ такая, что

$$B^2 = A.$$

Решение 22. Пусть

$$A = U^* \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) U,$$

причем матрица U унитарна. Положим

$$B = U^* \operatorname{diag}(\lambda_1^{1/2}, \ldots, \lambda_n^{1/2}) U.$$

В этом случае матрица B неотрицательно определена и

$$B^2 = A,$$

так как $U^*U = I_n$. Чтобы показать единственность B, предположим, что C — неотрицательно определенная матрица $n \times n$, удовлетворяющая условию $C^2 = A$. Так как собственные значения C равны неотрицательным квадратным корням собственных значений A, для некоторой унитарной матрицы V справедливо выражение

$$C = V \operatorname{diag}(\lambda_1^{1/2}, \ldots, \lambda_n^{1/2}) V^*.$$

Тогда из тождества

$$C^2 = A = B^2$$

следует

$$T \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) T,$$

где $T = UV$. Это значит, что

$$t_{jk}\lambda_k = \lambda_j t_{jk}.$$

Таким образом,

$$t_{jk}\lambda_k^{1/2} = \lambda_j^{1/2} t_{jk}.$$

Отсюда

$$T \operatorname{diag}(\lambda_1^{1/2}, \ldots, \lambda_n^{1/2}) = \operatorname{diag}(\lambda_1^{1/2}, \ldots, \lambda_n^{1/2}) T.$$

Из условия $T = UV$ вытекает, что

$$B = C.$$

Задача 23. Говорят, что матрица A размера $n \times n$ над множеством комплексных чисел является *нормальной*, если она коммутирует с эрмитово сопряженной матрицей

$$A^* A = AA^*.$$

Матрица A может быть записана в виде

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j E_j,$$

где $\lambda_j \in \mathbb{C}$ — собственные значения A, и E_j — матрицы $n \times n$, удовлетворяющие условиям

$$E_j^2 = E_j = E_j^*, \quad E_j E_k = 0 \text{ при } j \neq k, \quad \sum_{j=1}^{n} E_j = I_n.$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти разложение A, приведенное выше.

Решение 23. Собственные значения A равны

$$\lambda_1 = +1, \quad \lambda_2 = -1.$$

Матрицы E_j составлены из нормированных собственных векторов A, которые имеют вид

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$E_1 = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 24. Используя *уравнения Максвелла* в вакууме

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

и *вектор Крамера*

$$\mathbf{F} := \mathbf{E} + ic\mathbf{B}, \quad \mathbf{F}^* := \mathbf{E} - ic\mathbf{B},$$

показать, что *фотон* является частицей со спином 1.

Решение 24. Используя вектор Крамера, можно записать

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \frac{i}{c}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}, \quad \operatorname{curl}\mathbf{F}^* = -\frac{i}{c}\frac{\partial \mathbf{F}^*}{\partial t},$$
$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{F}^* = 0.$$

Пусть

$$\epsilon_{jkl} = \begin{cases} +1, \text{ если } jkl \text{ являются четной перестановкой целых чисел 123,} \\ -1, \text{ если } jkl \text{ являются нечетной перестановкой} \\ \qquad \text{целых чисел 123,} \\ \ \ 0 \ \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Так как

$$(\operatorname{curl}\mathbf{F})_j = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\epsilon_{jkl}\frac{\partial}{\partial x_k}F_l = -\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\epsilon_{jkl}F_l,$$

справедливо выражение

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\left(-i\frac{\partial}{\partial x_k}\right)(-i\epsilon_{kjl})F_l = \frac{i}{c}\frac{\partial F_j}{\partial t}.$$

Вводя дифференциальный оператор

$$\widehat{p}_k := -i\frac{\partial}{\partial x_k},$$

находим

$$-\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\widehat{p}_k i\epsilon_{kjl}F_l = \frac{i}{c}\frac{\partial F_l}{\partial t}.$$

Для фиксированных значений k произведение $-i\epsilon_{kjl}$ представляет собой матрицу $S_{k(j,l)}$ размера 3×3. Тогда уравнение для $\mathbf{F}$ принимает вид

$$\left(\sum_{k=1}^{3}\widehat{p}_k S_k\right)\mathbf{F} = (\widehat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{S})\mathbf{F} = \frac{i}{c}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}.$$

Используя определение ϵ_{jkl}, получим представление матриц 3×3

$$S_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем

$$\mathbf{S} \times \mathbf{S} = i\mathbf{S}$$

(значок «$\times$» здесь символизирует векторное произведение) и

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 2I_3.$$

Таким образом, уравнения Максвелла описывают частицу со спином 1.

Глава 4

Операторы плотности

Оператор плотности ρ или *матрица плотности* — это неотрицательно определенный оператор в гильбертовом пространстве с единичным следом. Оператор называется *неотрицательно определенным* если он является эрмитовым и все его собственные значения (которые обязательно должны быть вещественными) не меньше нуля. Состояние квантово-механической системы характеризуется оператором плотности ρ со следом $\operatorname{tr}\rho = 1$. Математическое ожидание наблюдаемой матрицы $\widehat{A}$, определяемое в эксперименте как среднее значение $\langle\widehat{A}\rangle$, задается соотношением

$$\langle\widehat{A}\rangle = \operatorname{tr}(\widehat{A}\rho).$$

Задача 1. Рассмотрим оператор (матрица 4×4) в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^4$

$$\rho = \frac{1}{4}(1-\epsilon)I_4 + \epsilon(|0\rangle \otimes |0\rangle)(\langle 0| \otimes \langle 0|)$$

где ϵ — вещественный параметр, $\epsilon \in [0, 1]$, и

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Является ли матрица ρ *матрицей плотности*?

Решение 1. Вычисляя, получим диагональную матрицу

$$\rho = \begin{pmatrix} (1-\epsilon)/4 + \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\epsilon)/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\epsilon)/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\epsilon)/4 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\rho = \rho^\dagger, \quad \operatorname{tr}\rho = 1, \quad \langle \mathbf{x}|\rho|\mathbf{x}\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in \mathbf{C}^4.$$

Последнее свойство следует из того, что все элементы на диагонали неотрицательны. То есть матрица ρ — матрица плотности.

Задача 2. Пусть

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta, \phi \in \mathbf{R}.$$

Является ли матрица

$$\rho := |\psi\rangle\langle\psi|$$

матрицей плотности?

Решение 2. Вычислив произведение, получим матрицу ρ размера 2×2

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & e^{-i\phi}\cos\theta\sin\theta \\ e^{i\phi}\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\rho = \rho^\dagger,$$
$$\mathrm{tr}\rho = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

и

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}|\rho|\mathbf{x}\rangle &= |x_1|^2\cos^2\theta + x_1\overline{x}_2 e^{-i\phi}\cos\theta\sin\theta + \\ &+ \overline{x}_1 x_2 e^{i\phi}\cos\theta\sin\theta + |x_2|^2\sin^2\theta \\ &\geqslant |x_1|^2\cos^2\theta + 2\,\mathrm{Re}(x_1\overline{x}_2 e^{i\phi})\cos\theta\sin\theta + |x_2|^2\sin^2\theta \\ &\geqslant (|x_1|\cos\theta + |x_2|\sin\theta)^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

для всех $\mathbf{x} := (x_1, x_2)^T \in \mathbf{C}^2$. То есть ρ — это матрица плотности.

Задача 3. Рассмотрим *смешанные состояния*. Смешанное состояние — это статистическая смесь чистых состояний, т. е. состояние описывается парами из вероятностей и чистых состояний. Для данной смеси $\{ (p_1, |\psi_1\rangle), \ldots, (p_n, |\psi_n\rangle) \}$ введем *матрицу плотности* как положительную эрмитову матрицу

$$\rho = \sum_{j=1}^{n} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|,$$

где чистые состояния $|\psi_j\rangle$ являются нормированными (т. е. $\langle\psi_j|\psi_j\rangle = 1$) и $p_j \geqslant 0$ при $j = 1, 2, \ldots, n$, причем

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1.$$

(i) Найти вероятность того, что измерение в ортонормированном базисе

$$\{\, |k_1\rangle, \ldots, |k_n\rangle \}$$

даст результат $|k_j\rangle$.

(ii) Найти матрицу плотности ρ_U, если смесь преобразуется с помощью унитарной матрицы U.

Решение 3. (i) Зная закон распределения вероятностей состояний в смеси, вычислим значение вероятности $P(k_j)$ того, что будет измерено состояние $|k_j\rangle$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$:

$$P(k_j) = \sum_{l=1}^{n} p_l |\langle k_j|\psi_l\rangle|^2 = \sum_{l=1}^{n} p_l \langle k_j|\psi_l\rangle\langle\psi_l|k_j\rangle = \langle k_j|\rho|k_j\rangle.$$

(ii) После применения преобразования U к состояниям в смеси получим новую смесь $\{\, (p_1, U|\psi_1\rangle), \ldots, (p_n, U|\psi_n\rangle) \}$ с матрицей плотности

$$\rho_U = \sum_{j=1}^{n} p_j U|\psi_j\rangle\langle\psi_j|U^* = U\left(\sum_{j=1}^{n} p_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\right)U^* = U\rho U^*.$$

Задача 4. Предположим, дано разложение матрицы плотности для N кубитов в виде кронекерова произведения спиновых матриц Паули:

$$\rho = \frac{1}{2^N}\sum_{j_0=0}^{3}\sum_{j_1=0}^{3}\ldots\sum_{j_{N-1}=0}^{3} c_{j_0 j_1 \ldots j_{N-1}} \sigma_{j_0}\otimes\sigma_{j_1}\otimes\ldots\otimes\sigma_{j_{N-1}},$$

где $\sigma_0 = I_2$.

(i) Какому условию должны удовлетворять коэффициенты разложения, если $\rho^\dagger = \rho$?

(ii) Какому условию должны удовлетворять коэффициенты разложения, если $\mathrm{tr}\rho = 1$?

(iii) Вычислить

$$\mathrm{tr}(\rho\sigma_{k_0} \otimes \sigma_{k_1} \otimes \ldots \otimes \sigma_{k_{N-1}}).$$

Решение 4. (i) Поскольку $\sigma_1 = \sigma_1^\dagger$, $\sigma_2 = \sigma_2^\dagger$, $\sigma_3 = \sigma_3^\dagger$ и $I_2 = I_2^\dagger$, то коэффициенты разложения должны быть вещественными.

(ii) Учитывая свойство следа $\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$ для квадратных матриц A и B и

$$\mathrm{tr}\sigma_1 = \mathrm{tr}\sigma_2 = \mathrm{tr}\sigma_3 = 0, \qquad \mathrm{tr}I_2 = 2,$$

получим, что $c_{00\ldots0} = 1$.

(iii) Поскольку

$$\mathrm{tr}(\sigma_1\sigma_2) = 0, \quad \mathrm{tr}(\sigma_2\sigma_3) = 0, \quad \mathrm{tr}(\sigma_3\sigma_1) = 0,$$

получаем

$$\mathrm{tr}(\rho\sigma_{k_0} \otimes \sigma_{k_1} \otimes \cdots \otimes \sigma_{k_{N-1}}) = c_{k_0k_1\ldots k_{N-1}}.$$

Задача 5. Предположим, что A и B — пара кубитов, а матрицу плотности пары обозначим через ρ_{AB}. Эта пара может быть как чистой, так и смешанной. Определим *матрицу плотности переворачивающихся спинов* (*spin-flipped density matrix*) в виде

$$\widetilde{\rho}_{AB} := (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*_{AB}(\sigma_y \otimes \sigma_y),$$

где звездочкой отмечено комплексное сопряжение в стандартном базисе

$$\{|0\rangle \otimes |0\rangle, \quad |0\rangle \otimes |1\rangle, \quad |1\rangle \otimes |0\rangle, \quad |1\rangle \otimes |1\rangle\}$$

и

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку как ρ_{AB}, так и $\widetilde{\rho}_{AB}$ — положительные операторы, произведение операторов $\rho_{AB}\widetilde{\rho}_{AB}$, хотя и не является эрмитовым, также имеет только вещественные и неотрицательные собственные числа. Рассмотрим состояние Белла

$$|\psi\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle)$$

и $\rho := |\psi\rangle\langle\psi|$. Найти собственные числа $\rho_{AB}\widetilde{\rho}_{AB}$.

Решение 5. Поскольку

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то $\widetilde{\rho} = \rho$. Кроме того,

$$\sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\widetilde{\rho} = \rho$ и $\rho\widetilde{\rho} = \rho$ имеет собственные числа 1, 0, 0, 0. *Запутанность* (*tangle*) матрицы плотности ρ_{AB} определяется формулой

$$\tau_{AB} := [\max\{\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_4, 0\}]^2,$$

где μ_j — квадратный корень из собственных чисел $\rho_{AB}\widetilde{\rho}_{AB}$, упорядоченных в убывающем порядке. В частном случае, когда состояние AB — чистое, матрица $\rho_{AB}\widetilde{\rho}_{AB}$ имеет только одно ненулевое собственное число и можно показать, что

$$\tau_{AB} = 4\det\rho_A,$$

где ρ_A — матрица плотности кубита A, то есть след ρ_{AB} по кубиту B.

Задача 6. Пусть ρ_1 и ρ_2 — две матрицы плотности размера $n \times n$. Обозначим через λ_j собственные числа матрицы $\rho_1 - \rho_2$, и через $|\phi_j\rangle$, где $j = 1, 2, \ldots, n$, — соответствующие им ортонормированные собственные векторы.

(i) Найти разность $|D_1 - D_2|$ между распределениями вероятности D_1 и D_2 при измерении смесей ρ_1 и ρ_2 в базисе $\{\,|\phi_1\rangle, \ldots, |\phi_n\rangle\,\}$.

(ii) Показать, что измерение в базисе $\{\,|\phi_1\rangle, \ldots, |\phi_n\rangle\,\}$ доставляет максимум для разности $|D_1 - D_2|$.

Подсказка. Использовать *теорему Шура*. Для произвольной эрмитовой матрицы A пусть

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$$

— диагональные элементы A в порядке невозрастания, и

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n$$

— собственные числа A в порядке невозрастания. Тогда при $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\sum_{j=1}^{k} \mu_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} a_j,$$

причем при $k = n$ имеем равенство.

Решение 6. (i) Запишем ρ_1 и ρ_2 в базисе $\{\,|\phi_1\rangle, \ldots, |\phi_n\rangle\,\}$. В этом базисе

$$\begin{aligned}
|D_1 - D_2| &= \sum_{j=1}^{n} |\langle\phi_j|\rho_1|\phi_j\rangle - \langle\phi_j|\rho_2|\phi_j\rangle| \\
&= \sum_{j=1}^{n} |\langle\phi_j|(\rho_1 - \rho_2)|\phi_j\rangle| \\
&= \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|\,.
\end{aligned}$$

(ii) Пусть U — произвольное унитарное преобразование (замена базиса). Введем матрицы $P := U\rho_1U^*$ и $Q := U\rho_2U^*$. Матрица $P - Q$ — эрмитова. Обозначим через

$$q_1 \geqslant q_2 \geqslant \cdots \geqslant q_n$$

диагональные элементы $P - Q$ в порядке невозрастания в базисе $\{\,|\phi_1\rangle, \ldots, |\phi_n\rangle\,\}$, и через

$$\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \cdots \geqslant \nu_n$$

— собственные числа (т. е. λ_j) матрицы $P - Q$ в порядке невозрастания. Рассмотрим разность $|D'_1 - D'_2|$ между распределениями вероятности D'_1 и D'_2 при измерении смесей ρ_1 и ρ_2 в базисе $\{\,U|\phi_1\rangle, \ldots, U|\phi_n\rangle\,\}$:

$$\begin{aligned}
|D'_1 - D'_2| &= \sum_{j=1}^{n} |\langle\phi_j|U^*\rho_1U|\phi_j\rangle - \langle\phi_j|U^*\rho_2U|\phi_j\rangle| \\
&= \sum_{j=1}^{n} |\langle\phi_j|P|\phi_j\rangle - \langle\phi_j|Q|\phi_j\rangle| = \sum_{j=1}^{n} |q_j|\,.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\mathrm{tr}(P - Q) = \mathrm{tr}(P) - \mathrm{tr}(Q) = 1 - 1 = 0$$

и

$$\mathrm{tr}(P) - \mathrm{tr}(Q) = \sum_{j=1}^{n} (\langle \phi_j | P | \phi_j \rangle - \langle \phi_j | Q | \phi_j \rangle) = \sum_{j=1}^{n} q_j,$$

получим, что при всех $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\left| \sum_{j=1}^{k} q_j \right| = \left| \sum_{j=k+1}^{n} q_j \right|.$$

Из *неравенства треугольника* следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} |q_j| \geqslant 2 \left| \sum_{j=1}^{k} q_j \right|,$$

причем равенство достигается при некотором $1 \leqslant k_0 \leqslant n$. Аналогично

$$\sum_{j=1}^{n} |\nu_j| \geqslant 2 \left| \sum_{j=1}^{k} \nu_j \right|.$$

Из теоремы Шура следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} |\nu_j| \geqslant \sum_{j=1}^{k_0} \nu_j \geqslant \sum_{j=1}^{k_0} q_j = \sum_{j=1}^{n} |q_j|.$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{n} |\nu_j| = |D_1 - D_2| \geqslant |D'_1 - D'_2| = \sum_{j=1}^{n} |q_j|.$$

Задача 7. Рассмотрим квантовую систему частиц со спином 1/2. Матрица плотности, описывающая спиновую степень свободы, имеет размер 2×2 и может быть записана в виде

$$\rho(\mathbf{n}) = \frac{1}{2}(I_2 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \equiv \frac{1}{2}(I_2 + n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3),$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — спиновые матрицы Паули и $|\mathbf{n}| \leqslant 1$. При $|\mathbf{n}| = 1$ матрица плотности описывает чистое состояние, тогда как при $|\mathbf{n}| < 1$ она описывает смешанное состояние. Матрица плотности ρ, таким образом, однозначно определяется точкой единичной сферы $|\mathbf{n}| \leqslant 1$. Рассмотрим гамильтониан

$$\widehat{H}(t) = -\frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}(t) \equiv -\frac{\gamma}{2}(\sigma_1 B_1(t) + \sigma_2 B_2(t) + \sigma_3 B_3(t)),$$

где γ — гиромагнитное отношение, и $\mathbf{B}(t)$ — магнитная индукция, зависящая от времени. Изменение во времени матрицы плотности $\rho(t)$ удовлетворяет *уравнению Неймана*

$$i\hbar\frac{d\rho(t)}{dt} = [\widehat{H}(t), \rho(t)],$$

а математическое ожидание спинового вектора определяется по формуле

$$\langle\boldsymbol{\sigma}(t)\rangle := \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}\rho(t))$$

или, покомпонентно,

$$\langle\sigma_1(t)\rangle = \operatorname{tr}(\sigma_1\rho(t)), \quad \langle\sigma_2(t)\rangle = \operatorname{tr}(\sigma_2\rho(t)), \quad \langle\sigma_3(t)\rangle = \operatorname{tr}(\sigma_3\rho(t))\,.$$

Отсюда следует, что *вектор Блоха* $\mathbf{n}(t)$, связанный с $\rho(t)$, связан со спиновым вектором следующим образом:

$$\mathbf{n}(t) = \langle\boldsymbol{\sigma}(t)\rangle$$

или, покомпонентно,

$$n_1(t) = \langle\sigma_1(t)\rangle, \quad n_2(t) = \langle\sigma_2(t)\rangle, \quad n_3(t) = \langle\sigma_3(t)\rangle.$$

Найти закон изменения $\mathbf{n}(t)$.

Решение 7. Имеем

$$\frac{dn_j}{dt} = \langle\frac{d\sigma_j(t)}{dt}\rangle = \operatorname{tr}\left(\sigma_j\frac{d\rho(t)}{dt}\right),$$

где $j = 1, 2, 3$. Подставляя правую часть уравнения Неймана, используя *циклическую инвариантность следа* $\operatorname{tr}(XYZ) = \operatorname{tr}(ZXY) = \operatorname{tr}(YZX)$ и свойства $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$, $\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$, получим

$$\frac{d}{dt}\mathbf{n}(t) = \frac{\gamma}{\hbar}\mathbf{n}(t)\times\mathbf{B}(t),$$

где символ $\times$ означает векторное произведение.

Задача 8. Для заданного *уравнения Шредингера*

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \widehat{H}|\psi\rangle$$

найти закон изменения матрицы плотности

$$\rho(t) := \sum_{j=1}^{n} |\psi^{(j)}(t)\rangle\langle\psi^{(j)}(t)|.$$

Решение 8. Из уравнения Шредингера следует, что

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi^{(j)}(t)| = \langle\psi^{(j)}(t)|\widehat{H}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}|\psi^{(j)}(t)\rangle\right)\langle\psi^{(j)}(t)| + |\psi^{(j)}(t)\rangle\left(\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi^{(j)}(t)|\right)\right) = \\
&= \frac{1}{i\hbar}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\widehat{H}|\psi^{(j)}(t)\rangle\right)\langle\psi^{(j)}(t)| - |\psi^{(j)}(t)\rangle\left(\langle\psi^{(j)}(t)|\widehat{H}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{i\hbar}(\widehat{H}\rho(t) - \rho(t)\widehat{H}) = \\
&= \frac{1}{i\hbar}[\widehat{H}, \rho(t)].
\end{aligned}$$

Заметим, что уравнение движения для $\rho(t)$ отличается от уравнения движения Гейзенберга знаком минус. Поскольку матрица $\rho(t)$ строится по векторам состояний, она не является наблюдаемой, как другие эрмитовы операторы, поэтому нет причин ожидать, что ее эволюция во времени будет такой же. Решение уравнения движения имеет вид

$$\rho(t) = e^{-i\widehat{H}t/\hbar}\rho(0)e^{i\widehat{H}t/\hbar}.$$

Задача 9. Пусть ρ — матрица плотности

$$\rho := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в $\mathbf{C}^2$. Найти чистое состояние $|\Psi\rangle \in \mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$ такое, что приведенная матрица плотности, найденная как частичный след второй системы ($\mathbf{C}^2$), равна ρ. Другими словами, *очистить матрицу плотности* ρ, чтобы получить чистое состояние $|\Psi\rangle$.

Решение 9. Начнем с *разложения Шмидта* $|\Psi\rangle$ в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$

$$|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{\mathrm{Sch}(|\Psi\rangle, \mathbf{C}^2, \mathbf{C}^2)} \sqrt{\lambda_j}|\psi_j\rangle \otimes |\phi_j\rangle,$$

где λ_1 и λ_2 — собственные числа ρ, и $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ — соответствующие ортонормированные собственные векторы ρ. Состояния $|\phi_1\rangle$ и $|\phi_2\rangle$ в $\mathbf{C}^2$ также являются ортонормированными. Собственные числа и собственные векторы матрицы ρ равны $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ и

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, спектральное разложение ρ имеет вид

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1\ 0) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0\ 1).$$

Следовательно,

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes |\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes |\phi_2\rangle,$$

где $\langle\phi_1|\phi_1\rangle = \langle\phi_2|\phi_2\rangle = 1$ и $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \langle\phi_2|\phi_1\rangle = 0$. Состояние $|\Psi\rangle$ можно взять в качестве одного из *состояний Белла*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Искомое состояние не может быть представлено в виде тензорного произведения состояний отдельных кубитов.

Глава 5
Частичный след

Вычисление *частичного следа* играет центральную роль в квантовых вычислениях. Предположим, что конечномерная квантовая система S^{AB} составлена из двух подсистем S^A и S^B. Конечномерное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ системы S^{AB} определяется как тензорное произведение отдельных гильбертовых пространств $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Пусть $N_A := \dim\mathcal{H}_A$ и $N_B := \dim\mathcal{H}_B$. Обозначим через ρ^{AB} матрицу плотности S^{AB}. Используя частичный след, можно определить операторы плотности ρ^A и ρ^B, действующие в подпространствах $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$:

$$\rho^A := \mathrm{tr}_B \rho^{AB} \equiv \sum_{j=1}^{N_B} (I_A \otimes \langle\phi_j|)\rho^{AB}(I_A \otimes |\phi_j\rangle)$$

и

$$\rho^B := \mathrm{tr}_A \rho^{AB} \equiv \sum_{j=1}^{N_A} (\langle\psi_j| \otimes I_B)\rho^{AB}(|\psi_j\rangle \otimes I_B\rangle),$$

где I_A — тождественный оператор, действующий в $\mathcal{H}_A$, I_B — тождественный оператор, действующий в $\mathcal{H}_B$, $|\phi_j\rangle$ $(j = 1, 2, \ldots, N_B)$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_B$, и $|\psi_j\rangle$ $(j = 1, 2, \ldots, N_A)$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_A$.

Задача 1. Предположим, что оператор ρ^{AB} является *сепарабельным*, т. е.

$$\rho^{AB} = \rho_A \otimes \rho_B.$$

Вычислить ρ^A и ρ^B.

Решение 1. Очевидно, что $\rho^A = \rho_A$ и $\rho^B = \rho_B$. Доказать это можно следующим образом:

$$\rho^A = \sum_{j=1}^{N_B} (I_A \otimes \langle\phi_j|)(\rho_A \otimes \rho_B)(I_A \otimes |\phi_j\rangle) = \sum_{j=1}^{N_B} (I_A \otimes \langle\phi_j|)(\rho_A \otimes \rho_B|\phi_j\rangle).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\rho^A &= \sum_{j=1}^{N_B} \rho_A \otimes \langle \phi_j | \rho_B | \phi_j \rangle \\ &= \rho_A \otimes \sum_{j=1}^{N_B} \langle \phi_j | \rho_B | \phi_j \rangle.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^{N_B} \langle \phi_j | \rho_B | \phi_j \rangle = 1,$$

имеем $\rho^A = \rho_A$. Аналогично можно показать, что $\rho^B = \rho_B$.

Задача 2. Рассмотрим матрицу 4×4 (*матрицу плотности*)

$$|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}| = \begin{pmatrix} u_1\bar{u}_1 & u_1\bar{u}_2 & u_1\bar{u}_3 & u_1\bar{u}_4 \\ u_2\bar{u}_1 & u_2\bar{u}_2 & u_2\bar{u}_3 & u_2\bar{u}_4 \\ u_3\bar{u}_1 & u_3\bar{u}_2 & u_3\bar{u}_3 & u_3\bar{u}_4 \\ u_4\bar{u}_1 & u_4\bar{u}_2 & u_4\bar{u}_3 & u_4\bar{u}_4 \end{pmatrix}$$

в гильбертовом пространстве произведений $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \equiv \mathbf{C}^4$, где $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbf{C}^2$.

(i) Вычислить величину

$$\mathrm{tr}_A(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|)$$

для базиса

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes I_2, \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes I_2;$$

здесь I_2 — единичная матрица 2×2.

(ii) Найти величину

$$\mathrm{tr}_B(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|)$$

для базиса

$$I_2 \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad I_2 \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Решение 2. (i) Вычислим

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes I_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Используя операцию транспонирования матриц, найдем

$$\mathrm{tr}_A(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\bar u_1&u_1\bar u_2&u_1\bar u_3&u_1\bar u_4\\u_2\bar u_1&u_2\bar u_2&u_2\bar u_3&u_2\bar u_4\\u_3\bar u_1&u_3\bar u_2&u_3\bar u_3&u_3\bar u_4\\u_4\bar u_1&u_4\bar u_2&u_4\bar u_3&u_4\bar u_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\bar u_1&u_1\bar u_2&u_1\bar u_3&u_1\bar u_4\\u_2\bar u_1&u_2\bar u_2&u_2\bar u_3&u_2\bar u_4\\u_3\bar u_1&u_3\bar u_2&u_3\bar u_3&u_3\bar u_4\\u_4\bar u_1&u_4\bar u_2&u_4\bar u_3&u_4\bar u_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получим

$$\mathrm{tr}_A(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|)=\begin{pmatrix}u_1\bar u_1&u_1\bar u_2\\u_2\bar u_1&u_2\bar u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_3\bar u_3&u_3\bar u_4\\u_4\bar u_3&u_4\bar u_4\end{pmatrix}.$$

В итоге имеем матрицу 2×2

$$\mathrm{tr}_A(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|)=\begin{pmatrix}u_1\bar u_1+u_3\bar u_3&u_1\bar u_2+u_3\bar u_4\\u_2\bar u_1+u_4\bar u_3&u_2\bar u_2+u_4\bar u_4\end{pmatrix}.$$

(ii) Поскольку

$$I_2\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad I_2\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

аналогично находим

$$\mathrm{tr}_B(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\bar u_1&u_1\bar u_2&u_1\bar u_3&u_1\bar u_4\\u_2\bar u_1&u_2\bar u_2&u_2\bar u_3&u_2\bar u_4\\u_3\bar u_1&u_3\bar u_2&u_3\bar u_3&u_3\bar u_4\\u_4\bar u_1&u_4\bar u_2&u_4\bar u_3&u_4\bar u_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\bar u_1&u_1\bar u_2&u_1\bar u_3&u_1\bar u_4\\u_2\bar u_1&u_2\bar u_2&u_2\bar u_3&u_2\bar u_4\\u_3\bar u_1&u_3\bar u_2&u_3\bar u_3&u_3\bar u_4\\u_4\bar u_1&u_4\bar u_2&u_4\bar u_3&u_4\bar u_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

С помощью матричного умножения получим

$$\mathrm{tr}_B(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|) = \begin{pmatrix} u_1\bar{u}_1 & u_1\bar{u}_3 \\ u_3\bar{u}_1 & u_3\bar{u}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2\bar{u}_2 & u_2\bar{u}_4 \\ u_4\bar{u}_2 & u_4\bar{u}_4 \end{pmatrix}.$$

В итоге искомая матрица 2×2 имеет вид

$$\mathrm{tr}_B(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|) = \begin{pmatrix} u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 & u_1\bar{u}_3 + u_2\bar{u}_4 \\ u_3\bar{u}_1 + u_4\bar{u}_2 & u_3\bar{u}_3 + u_4\bar{u}_4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\mathrm{tr}_A(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|) \neq \mathrm{tr}_B(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|).$$

Однако

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{tr}_A(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|)) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{tr}_B(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|))$$

и

$$\det\,(\mathrm{tr}_A(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|)) = \det\,(\mathrm{tr}_B(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|)).$$

Задача 3. Рассмотрим матрицу 9×9 (матрицу плотности)

$$|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}| = \begin{pmatrix}
u_1\bar{u}_1 & u_1\bar{u}_2 & u_1\bar{u}_3 & u_1\bar{u}_4 & u_1\bar{u}_5 & u_1\bar{u}_6 & u_1\bar{u}_7 & u_1\bar{u}_8 & u_1\bar{u}_9 \\
u_2\bar{u}_1 & u_2\bar{u}_2 & u_2\bar{u}_3 & u_2\bar{u}_4 & u_2\bar{u}_5 & u_2\bar{u}_6 & u_2\bar{u}_7 & u_2\bar{u}_8 & u_2\bar{u}_9 \\
u_3\bar{u}_1 & u_3\bar{u}_2 & u_3\bar{u}_3 & u_3\bar{u}_4 & u_3\bar{u}_5 & u_3\bar{u}_6 & u_3\bar{u}_7 & u_3\bar{u}_8 & u_3\bar{u}_9 \\
u_4\bar{u}_1 & u_4\bar{u}_2 & u_4\bar{u}_3 & u_4\bar{u}_4 & u_4\bar{u}_5 & u_4\bar{u}_6 & u_4\bar{u}_7 & u_4\bar{u}_8 & u_4\bar{u}_9 \\
u_5\bar{u}_1 & u_5\bar{u}_2 & u_5\bar{u}_3 & u_5\bar{u}_4 & u_5\bar{u}_5 & u_5\bar{u}_6 & u_5\bar{u}_7 & u_5\bar{u}_8 & u_5\bar{u}_9 \\
u_6\bar{u}_1 & u_6\bar{u}_2 & u_6\bar{u}_3 & u_6\bar{u}_4 & u_6\bar{u}_5 & u_6\bar{u}_6 & u_6\bar{u}_7 & u_6\bar{u}_8 & u_6\bar{u}_9 \\
u_7\bar{u}_1 & u_7\bar{u}_2 & u_7\bar{u}_3 & u_7\bar{u}_4 & u_7\bar{u}_5 & u_7\bar{u}_6 & u_7\bar{u}_7 & u_7\bar{u}_8 & u_7\bar{u}_9 \\
u_8\bar{u}_1 & u_8\bar{u}_2 & u_8\bar{u}_3 & u_8\bar{u}_4 & u_8\bar{u}_5 & u_8\bar{u}_6 & u_8\bar{u}_7 & u_8\bar{u}_8 & u_8\bar{u}_9 \\
u_9\bar{u}_1 & u_9\bar{u}_2 & u_9\bar{u}_3 & u_9\bar{u}_4 & u_9\bar{u}_5 & u_9\bar{u}_6 & u_9\bar{u}_7 & u_9\bar{u}_8 & u_9\bar{u}_9
\end{pmatrix}.$$

Найти

$$\mathrm{tr}_{\mathbf{C}^3}(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|)$$

для базиса

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes I_3, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes I_3, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes I_3.$$

Здесь I_3 — единичная матрица 3×3.

Решение 3. Расписывая тензорное произведение, получим

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\otimes I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\otimes I_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\otimes I_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Соответствующие транспонированные матрицы имеют вид

$$(100)\otimes I_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$(010)\otimes I_3=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$(001)\otimes I_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Выбирая их в качестве базиса, вычислим след:

$$\operatorname{tr}_A(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|)=$$

$$=\begin{pmatrix}u_1\bar u_1&u_1\bar u_2&u_1\bar u_3\\u_2\bar u_1&u_2\bar u_2&u_2\bar u_3\\u_3\bar u_1&u_3\bar u_2&u_3\bar u_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_4\bar u_4&u_4\bar u_5&u_4\bar u_6\\u_5\bar u_4&u_5\bar u_5&u_5\bar u_6\\u_6\bar u_4&u_6\bar u_5&u_6\bar u_6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_7\bar u_7&u_7\bar u_8&u_7\bar u_9\\u_8\bar u_7&u_8\bar u_8&u_8\bar u_9\\u_9\bar u_7&u_9\bar u_8&u_9\bar u_9\end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим матрицу 3×3

$$\operatorname{tr}_A(|\mathbf{u}\rangle\langle\mathbf{u}|) =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1\bar{u}_1 + u_4\bar{u}_4 + u_7\bar{u}_7 & u_1\bar{u}_2 + u_4\bar{u}_5 + u_7\bar{u}_8 & u_1\bar{u}_3 + u_4\bar{u}_6 + u_7\bar{u}_9 \\ u_2\bar{u}_1 + u_5\bar{u}_4 + u_8\bar{u}_7 & u_2\bar{u}_2 + u_5\bar{u}_5 + u_8\bar{u}_8 & u_2\bar{u}_3 + u_5\bar{u}_6 + u_8\bar{u}_9 \\ u_3\bar{u}_1 + u_6\bar{u}_4 + u_9\bar{u}_7 & u_3\bar{u}_2 + u_6\bar{u}_5 + u_9\bar{u}_8 & u_3\bar{u}_3 + u_6\bar{u}_6 + u_9\bar{u}_9 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Частичный след также можно вычислить и другим способом. Рассмотрим двухчастичное состояние

$$|\psi\rangle = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} c_{jk}|jk\rangle \equiv \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} c_{jk}|j\rangle \otimes |k\rangle, \qquad \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} c_{jk}c_{jk}^* = 1$$

в конечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathbf{C}^n \otimes \mathbf{C}^n$. Введем матрицу $n \times n$

$$\Lambda_{jk} := c_{jk}, \qquad j, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Тогда (доказать это)

$$\rho_A = \operatorname{tr}_B \rho = \Lambda\Lambda^\dagger.$$

(i) Рассмотреть состояния Белла. Найти ρ_A.

(ii) При унитарном преобразовании U, V (U и V являются унитарными матрицами $n \times n$) матрица Λ преобразуется к виду

$$\Lambda \to U^T \Lambda V,$$

где символ ^{T} означает операцию транспонирования. Применить преобразование к $\Lambda\Lambda^\dagger$. Вычислить $\operatorname{tr}(\Lambda\Lambda^\dagger)^2$.

Решение 4. (i) Рассмотрим *состояние Белла*

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle).$$

Так как $c_{00} = c_{11} = 1/\sqrt{2}$ и $c_{01} = c_{10} = 0$, матрица Λ имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Находим

$$\rho_A = \Lambda\Lambda^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Для других трех состояний Белла вычисление дает тот же результат.

(ii) Поскольку $V^\dagger V = VV^\dagger = I_n$, имеем

$$\Lambda\Lambda^\dagger \to (U^T \Lambda V)(V^\dagger \Lambda^\dagger U^{T\dagger}) = U^\dagger \Lambda\Lambda^\dagger U^{T\dagger}.$$

Кроме того, след $\mathrm{tr}(\Lambda\Lambda^\dagger)^2$ инвариантен относительно преобразования, поскольку $U^T U^{T\dagger} = (U^\dagger U)^T = I_n$.

Задача 5. Пусть $\{|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |N-1\rangle\}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^N$. Определим дискретный *оператор Вигнера* следующим образом:

$$\widehat{A}(q,p) := \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} \delta_{2q,r+s} \exp\left(i\frac{2\pi}{N}p(r-s)\right) |r\rangle\langle s|,$$

где q и p принимают целочисленные значения от 0 до $N-1$, и $\delta_{m,u}$ — символ Кронекера. Вычисления по индексу проводятся по модулю N, т. е. $2q \bmod N$ и $(r+s) \bmod N$. Пары (p,q) образуют дискретное фазовое пространство. Для состояния, описываемого с помощью матрицы плотности ρ, дискретная *функция Вигнера* имеет вид

$$W(p,q) := \frac{1}{N}\mathrm{tr}(\rho\widehat{A}).$$

Пусть $\rho = |0\rangle\langle 0|$. Вычислить $W(p,q)$.

Решение 5. Поскольку $\langle 0|r\rangle = \delta_{0r}$, получим

$$W(p,q) = \frac{1}{N}\mathrm{tr}\left(|0\rangle \sum_{s=0}^{N-1} \delta_{2q,s} \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}ps\right) \langle s|\right).$$

Чтобы вычислить след, преобразуем выражение

$$W(p,q) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\langle k|0\rangle \sum_{s=0}^{N-1} \delta_{2q,s} \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}ps\right) \langle s|k\rangle\right).$$

Учитывая, что $\langle k|0\rangle = \delta_{k0}$ и $\langle s|k\rangle = \delta_{sk}$, получаем

$$W(p,q) = \frac{1}{N}\delta_{2q,0}.$$

Задача 6. Совместная функция Вигнера для двухчастичного состояния с подсистемами 1 и 2, описываемого совместной матрицей плотности, имеет вид

$$W(q_1,q_2,p_1,p_2) := \frac{1}{N^2}\mathrm{tr}(\rho^{(12)}(\widehat{A}_1(q_1,p_1)\otimes\widehat{A}_2(q_2,p_2)),$$

где операторы Вигнера определяются следующим образом:

$$\widehat{A}_1(q_1,p_1) := \sum_{r=0}^{N-1}\sum_{s=0}^{N-1}\delta_{2q_1,r+s}\exp\left(i\frac{2\pi}{N}p_1(r-s)\right)|r\rangle\langle s|$$

и

$$\widehat{A}_2(q_2,p_2) := \sum_{r=0}^{N-1}\sum_{s=0}^{N-1}\delta_{2q_2,r+s}\exp\left(i\frac{2\pi}{N}p_2(r-s)\right)|r\rangle\langle s|.$$

Описывающие подсистему функции Вигнера получаются суммированием совместных функций Вигнера по определенной совокупности соответствующих переменных, например:

$$W(q_1,p_1) = \sum_{q_2=0}^{N-1}\sum_{p_2=0}^{N-1}W(q_1,p_1,q_2,p_2)$$

$$W(q_2,p_2) = \sum_{q_1=0}^{N-1}\sum_{p_1=0}^{N-1}W(q_1,p_1,q_2,p_2).$$

Рассмотрим *ЭПР-состояние*

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}|k\rangle\otimes|k\rangle.$$

Пусть $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Вычислить $W(q_1,q_2,p_1,p_2)$. Сделать выводы.

Решение 6. Функция Вигнера получается непосредственным вычислением

$$W(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{N^2}\delta_{q_1,q_2}\delta_{p_1,-p_2}.$$

Эта функция показывает связь с ЭПР-состоянием при телепортации непрерывных переменных

$$\delta(q_1 - q_2) \otimes \delta(p_1 + p_2),$$

где δ — дельта-функция Дирака.

Глава 6

Унитарные преобразования и квантовые вентили

Квантовые вентили реализуются с помощью *унитарных операторов*. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Линейный оператор $U\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ в гильбертовом пространстве является унитарным, если $U^*U = UU^* = I$, где символ * означает операцию эрмитова сопряжения, и I — единичный оператор. Если матрица H эрмитова, то матрица $\exp(iH)$ является унитарной.

Задача 1. (i) Пусть $A := |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ из гильбертового пространства $\mathbf{C}^2$. Вычислить

$$U_H A U_H |0\rangle, \qquad U_H A U_H |1\rangle,$$

где U_H — *преобразование Уолша–Адамара*. Унитарное преобразование U_H имеет вид

$$U_H|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^k|1\rangle), \qquad k \in \{0,1\}.$$

(ii) Вычислить

$$(U_H \otimes U_H) U_{CNOT} (U_H \otimes U_H)|j,k\rangle,$$

где $|j,k\rangle \equiv |j\rangle \otimes |k\rangle$, и $j,k \in \{0,1\}$. Ответ представить в виде кет-вектора $|m,n\rangle$, где $m,n \in \{0,1\}$. Унитарное преобразование

$$U_{CNOT} := |0\rangle\langle 0| \otimes I_2 + |1\rangle\langle 1| \otimes U_{NOT}$$

является операцией *контролируемого НЕ* (*NOT* (*CNOT*)), а унитарное преобразование

$$U_{NOT} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

является операцией *НЕ* (*NOT*).

Решение 1. (i) Пусть $j \in \{0, 1\}$. Тогда

$$\begin{aligned} U_H A U_H |j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} U_H A(|0\rangle + (-1)^j |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} U_H (|0\rangle + (-1)^{j+1}|1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} U_H (|0\rangle + (-1)^{\bar{j}}|1\rangle) = |\bar{j}\rangle, \end{aligned}$$

где $\bar{j} := 1 - j$. Другими словами,

$$U_H A U_H = U_{NOT}.$$

(ii) Непосредственное вычисление дает следующее выражение:

$$\begin{aligned} &(U_H \otimes U_H) U_{CNOT} (U_H \otimes U_H)|j, k\rangle \\ &= \frac{1}{2}(U_H \otimes U_H) U_{CNOT} \big((|0\rangle + (-1)^j|1\rangle) \otimes (|0\rangle + (-1)^k|1\rangle)\big) \\ &= \frac{1}{2}(U_H \otimes U_H)(|00\rangle + (-1)^k|01\rangle + (-1)^j|11\rangle + (-1)^{j+k}|10\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(U_H \otimes U_H)(|0\rangle \otimes (|0\rangle + (-1)^k|1\rangle) + (-1)^j|1\rangle \otimes (|1\rangle + (-1)^k|0\rangle)) \\ &= \frac{1}{2}(U_H \otimes U_H)(|0\rangle \otimes (|0\rangle + (-1)^k|1\rangle) + (-1)^{j+k}|1\rangle \otimes (|0\rangle + (-1)^k|1\rangle)) \\ &= \frac{1}{2}(U_H \otimes U_H)(|0\rangle + (-1)^{j+k}|1\rangle) \otimes (|0\rangle + (-1)^k|1\rangle) \\ &= |j \oplus k, k\rangle, \end{aligned}$$

где $\oplus$ — операция XOR. То есть получим операцию *контролируемого НЕ* (*CNOT*), где второй кубит контролирующий, а первый — контролируемый.

Задача 2. Рассмотрим линейный оператор

$$H := i\hbar\omega(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|),$$

действующий в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^2$, где

$$\{|0\rangle, |1\rangle\}$$

— ортонормированный базис $\mathbf{C}^2$, и ω — вещественный параметр.

(i) Является ли H самосопряженным?

(ii) Найти собственные числа и соответствующие нормированные собственные векторы H.

(iii) Вычислить

$$U(t) := \exp(-iHt/\hbar).$$

Найти такие значения t, что $U(t)$ реализует операцию NOT:

$$U(t)|0\rangle \to |1\rangle$$

$$U(t)|1\rangle \to |0\rangle.$$

(iv) Вычислить $U(t = \pi/4\omega)$ и $(U(t = \pi/4\omega))^2$.

Решение 2. (i) Операция сопряжения оператора может быть выполнена с помощью простой замены индексов в соответствующих бра- и кет-векторах в сумме и последующего комплексного сопряжения всех комплексных коэффициентов. Таким образом,

$$H^* = \bar{i}\hbar\omega(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|) = -i\hbar\omega(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|) = H,$$

т. е. H является самосопряженным. Мы можем определить H^* также следующим образом. Пусть

$$H^* = a_{00}|0\rangle\langle 0| + a_{01}|0\rangle\langle 1| + a_{10}|1\rangle\langle 0| + a_{11}|1\rangle\langle 1|, \qquad a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11} \in \mathbf{C}.$$

Бра-вектор, соответствующий кет-вектору $H|y\rangle$, равен $\langle y|H^*$. Потребуем, чтобы $\langle H^*y|x\rangle = \langle y|Hx\rangle$ для всех $|x\rangle = x_0|0\rangle + x_1|1\rangle$ и $|y\rangle = y_0|0\rangle + y_1|1\rangle$. Получим

$$\begin{aligned} H|x\rangle &= i\hbar\omega(x_1|0\rangle - x_0|1\rangle), \\ H^*|y\rangle &= (y_0 a_{00} + y_1 a_{01})|0\rangle + (y_0 a_{10} + y_1 a_{11})|1\rangle, \\ \langle y|Hx\rangle &= i\hbar\omega(x_1\overline{y_0} - x_0\overline{y_1}), \\ \langle H^*y|x\rangle &= x_0(\overline{y_0 a_{00}} + \overline{y_1 a_{01}}) + x_1(\overline{y_0 a_{10}} + \overline{y_1 a_{11}}). \end{aligned}$$

Поскольку $\langle H^*y|x\rangle = \langle y|Hx\rangle$ для всех $|x\rangle$ и $|y\rangle$,

$$i\hbar\omega\overline{y_0} = (\overline{y_0 a_{10}} + \overline{y_1 a_{11}}), \qquad -i\hbar\omega\overline{y_1} = (\overline{y_0 a_{00}} + \overline{y_1 a_{01}})\,.$$

Следовательно,

$$a_{00} = 0, \qquad a_{01} = i\hbar\omega, \qquad a_{10} = -i\hbar\omega, \qquad a_{11} = 0\,.$$

(ii) Характеристическое уравнение для H имеет вид

$$H(a|0\rangle + b|1\rangle) = \lambda(a|0\rangle + b|1\rangle).$$

Соответственно получим уравнения

$$-i\hbar\omega a = \lambda b, \quad i\hbar\omega b = \lambda a\,.$$

Если $\lambda = 0$, то $a = 0$ и $b = 0$. Следовательно, необходимо рассмотреть лишь случай $\lambda \neq 0$. Очевидно, можно предположить, что $b \neq 0$ (соответственно $a \neq 0$). В этом случае

$$\lambda = -\frac{i\hbar\omega a}{b}\,.$$

Следовательно, $ib^2 = -ia^2$, так что $b = \pm ia$. Из соотношения $|a|^2 + |b|^2 = 1$ следует, что $|a| = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Собственные значения и соответствующие ортонормированные собственные векторы имеют вид

$$\lambda_1 = -\hbar\omega, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)\lambda_2 = \hbar\omega, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle).$$

(iii) Для того чтобы найти H^n ($n \in \mathbf{N}$) заметим, что

$$H^2 = (\hbar\omega)^2(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = (\hbar\omega)^2 I_2, \quad H^3 = (\hbar\omega)^2 H, \quad H^4 = (\hbar\omega)^4 I_2.$$

Соответственно,

$$H^n = \begin{cases} (\hbar\omega)^{n-1}H, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ (\hbar\omega)^n I_2, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Поскольку $U(t) := \exp(-iHt/\hbar)$, получим

$$\begin{aligned}
U(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\frac{it}{\hbar})^j H^j}{j!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^{2j}}{(2j)!} I_2 + \frac{1}{\hbar\omega} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^{2j+1}}{(2j+1)!} H \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j(\omega t)^{2j}}{(2j)!} I_2 - i\frac{1}{\hbar\omega} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j(\omega t)^{2j+1}}{(2j+1)!} H \\
&= \cos(\omega t) I_2 - \frac{i}{\hbar\omega}\sin(\omega t) H \\
&= \cos(\omega t)(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + \sin(\omega t)(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|).
\end{aligned}$$

Для операции NOT используем соотношение

$$U(t = \pi/2\omega) = |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|.$$

Унитарные преобразования $U((2k+1)\pi/2\omega)$, $k \in \mathbf{N}_0$, реализуют операцию NOT.

(iv) Поскольку

$$U(t = \pi/4\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\langle 1|,$$

$$U(t = \pi/4\omega)^2 = U(t = \pi/2\omega) = |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|,$$

получим $(U(t = \pi/4\omega))^2 = U(t = \pi/2\omega)$, т. е. $U(t = \pi/4\omega)$ можно рассматривать как операцию извлечения *квадратного корня* из нашей операции NOT. Обычно в квантовых вычислениях используется соотношение

$$U_{NOT} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|.$$

В нашем случае для операции $\sqrt{\mathrm{NOT}}$ используется следующее выражение:

$$U_{\sqrt{NOT}} = \frac{1}{2}(1+i)(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + \frac{1}{2}(1-i)(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|).$$

Задача 3. Пусть σ_x, σ_y, σ_z — *спиновые матрицы Паули*

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Найти

$$R_{1x}(\alpha) := \exp(-i\alpha(\sigma_x \otimes I_2)), \qquad R_{1y}(\alpha) := \exp(-i\alpha(\sigma_y \otimes I_2)),$$

где $\alpha \in \mathbf{R}$, I_2 — единичная матрица 2×2.

(ii) Рассмотреть частные случаи $R_{1x}(\alpha = \pi/2)$ и $R_{1y}(\alpha = \pi/4)$. Вычислить $R_{1x}(\pi/2)R_{1y}(\pi/4)$. Сделать выводы.

Решение 3. (i) Имеем

$$\exp(-i\alpha(\sigma_x \otimes I_2)) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\alpha(\sigma_x \otimes I_2))^k}{k!}.$$

Поскольку $\sigma_x^2 = I_2$, верно

$$(\sigma_x \otimes I_2)^2 = I_2 \otimes I_2,$$

и, с учетом того что $\exp(-i\pi/2) = -i$, в итоге получаем

$$\exp(-i\alpha(\sigma_x \otimes I_2)) = (I_2 \otimes I_2)\cos\alpha + e^{-i\pi/2}(\sigma_x \otimes I_2)\sin\alpha.$$

По аналогии

$$\exp(-i\alpha(\sigma_y \otimes I_2)) = (I_2 \otimes I_2)\cos\alpha + e^{-i\pi/2}(\sigma_y \otimes I_2)\sin\alpha,$$

поскольку

$$(\sigma_y \otimes I_2)^2 = I_2 \otimes I_2.$$

(ii) Учитывая, что $\sin(\pi/2) = 1$ и $\cos(\pi/2) = 0$, получим

$$R_{1x}(\pi/2) = e^{-i\pi/2}(\sigma_x \otimes I_2).$$

С учетом равенств $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ имеем

$$R_{1y}(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_2 \otimes I_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/2}(\sigma_y \otimes I_2).$$

Таким образом, поскольку $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$,

$$R_{1x}(\pi/2)R_{1y}(\pi/4) = \frac{e^{-i\pi/2}}{\sqrt{2}}(\sigma_x \otimes I_2) + \frac{e^{-i\pi/2}}{\sqrt{2}}(\sigma_z \otimes I_2).$$

Следовательно,

$$R_{1x}(\pi/2)R_{1y}(\pi/4) = \frac{e^{-i\pi/2}}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z) \otimes I_2,$$

где

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

является *вентилем Уолша–Адамара*. Все единичные операции принадлежат группе Ли $SU(2)$, определитель которой равен $+1$, тогда как определитель вентиля Уолша–Адамара равен -1. Таким образом, наличие общей фазы оказывается неизбежным.

Задача 4. Рассмотрим состояние в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathbf{C}^{16}$

$$|\psi_0\rangle = |0101\rangle,$$

где $|0101\rangle \equiv |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle$, и $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ является стандартным базисом в $\mathbf{C}^2$. Пусть

$$\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= B|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle + |0110\rangle), \\
|\psi_2\rangle &= U|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle + |1010\rangle), \\
|\psi_3\rangle &= S|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle - |1010\rangle), \\
|\psi_4\rangle &= U^*|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle - |0110\rangle), \\
|\psi_5\rangle &= B^*|\psi_4\rangle = -|0110\rangle.
\end{aligned}$$

Найти унитарные матрицы B, U, S размера 16×16, которые осуществляют эти преобразования.

Решение 4. Из вышеприведенных уравнений следует, что

$$\begin{aligned}
B|0101\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle + |0110\rangle), \\
U\frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle + |0110\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle + |1010\rangle), \\
S\frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle + |1010\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle - |1010\rangle), \\
U^*\frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle - |1010\rangle) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle - |0110\rangle), \\
B^*\frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle - |0110\rangle) &= -|0110\rangle.
\end{aligned}$$

Унитарное преобразование переводит один ортонормированный базис в другой ортонормированный базис. Данные уравнения не однозначно определяют преобразования B, U и S. Пусть, для простоты, B, U и S будут тождественными на подпространствах для которых унитарные преобразования не ограничены вышеприведенными уравнениями. Тогда для B получим

$$B|0101\rangle = |01\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \qquad B|0110\rangle = |01\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle).$$

Одним из решений является следующее:

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} I_4 \otimes (|\gamma\rangle\langle 01| + |\delta\rangle\langle 10| + |\alpha\rangle\langle 00| + |\beta\rangle\langle 11|),$$

где

$$|\alpha\rangle = |00\rangle + |11\rangle, \quad |\beta\rangle = |00\rangle - |11\rangle, \quad |\gamma\rangle = |01\rangle + |10\rangle, \quad |\delta\rangle = |10\rangle - |01\rangle.$$

Это означает, что B отображает вычислительный базис в базис Белла во вторых двух кубитах. Для U получим

$$U\left(|01\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle + |1010\rangle)$$

и

$$U\left(|01\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle - |1010\rangle).$$

Перепишем эти уравнения в более простой форме:

$$U|0101\rangle = |0101\rangle, \qquad U|0110\rangle = |1010\rangle.$$

Тогда решение для U имеет вид

$$U = I_{16} + (|1010\rangle - |0110\rangle)(\langle 0110| - \langle 1010|),$$

т. е. U является тождественным преобразованием, за исключением подпространства, натянутого на $|0110\rangle$ и $|1010\rangle$, где U переставляет местами $|0110\rangle$ и $|1010\rangle$. Для S верно соотношение

$$S\frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle + |1010\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0101\rangle - |1010\rangle).$$

Решение S имеет вид

$$S = I_{16} - 2|1010\rangle\langle 1010|,$$

т. е. преобразование S является тождественным, за исключением того, что оно меняет знак $|1010\rangle$.

Задача 5. Преобразование

$$U_{QFT} := \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{-i2\pi kj/2^n} |k\rangle\langle j| \tag{1}$$

называется *квантовым преобразованием Фурье*. Показать, что U_{QFT} является унитарным. Другими словами, с учетом *соотношения полноты*

$$I_{2^n} = \sum_{j=0}^{2^n-1} |j\rangle\langle j|$$

показать, что $U_{QFT}U_{QFT}^* = I_{2^n}$, где I_{2^n} является единичной матрицей $2^n \times 2^n$.

Решение 5. Согласно определению (1)

$$U_{QFT}^* = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i2\pi kj/2^n} |j\rangle\langle k|,$$

где символ * означает операцию эрмитова сопряжения. Следовательно,

$$\begin{aligned} U_{QFT}U_{QFT}^* &= \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{l=0}^{2^n-1} \sum_{m=0}^{2^n-1} e^{i2\pi(kj-lm)/2^n} |j\rangle\langle k|l\rangle\langle m| \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{m=0}^{2^n-1} e^{i2\pi(kj-km)/2^n} |j\rangle\langle m|. \end{aligned}$$

При $j = m$ выполнено равенство $e^{i2\pi(kj-km)/2^n} = 1$. Поэтому для $j, m = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$ получим

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} (e^{i2\pi(j-m)/2^n})^k = 2^n, \quad j = m,$$

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} (e^{i2\pi(j-m)/2^n})^k = \frac{1 - e^{i2\pi(j-m)}}{1 - e^{i2\pi(j-m)/2^n}} = 0, \quad j \neq m\,.$$

Таким образом,

$$U_{QFT}U_{QFT}^{*} = \sum_{j=0}^{2^n-1} |j\rangle\langle j| = I_{2^n}.$$

Задача 6. Применить квантовое преобразование Фурье к состоянию в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^8$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{7} \cos(2\pi j/8)|j\rangle,$$

где квантовое преобразование Фурье определяется соотношением

$$U_{QFT} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{j=0}^{7}\sum_{k=0}^{7} e^{-i2\pi kj/8}|k\rangle\langle j|.$$

В качестве ортонормированного базиса гильбертового пространства $\mathbf{C}^8$ выбран следующий базис:

$$\{\,|j\rangle \,:\, j = 0, 1, \ldots, 7\,\},$$

где $|7\rangle = |111\rangle \equiv |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle$.

Решение 6. Используем *тождество Эйлера*

$$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\sin\theta$$

и

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi k(n-m)/N} = N\delta_{nm}.$$

Необходимо определить

$$\begin{aligned}
\widehat{x}(k) &= \sum_{j=0}^{7} e^{-i2\pi kj/8}\cos(2\pi j/8) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{7} \left(e^{i2\pi(1-k)j/8} + e^{-i2\pi(1+k)j/8}\right) \\
&= 4(\delta_{k1} + \delta_{k7}).
\end{aligned}$$

В результате получим

$$U_{QFT}\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{7}\cos(2\pi j/8)|j\rangle = \frac{1}{2\sqrt{8}}\sum_{k=0}^{7}\widehat{x}(k)|k\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |7\rangle).$$

Задача 7. Пусть

$$U_{IA} := \sum_{j=0}^{2^n-1}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(\frac{2}{2^n} - \delta_{jk}\right)|k\rangle\langle j|. \qquad (1)$$

Оператор U_{IA} называется оператором *инверсии относительно среднего*. Показать, что U_{IA} является унитарным или другими словами, показать, что $U_{IA}U_{IA}^* = I_{2^n}$.

Подсказка: использовать *соотношения полноты*

$$\sum_{j=0}^{2^n-1}|j\rangle\langle j| = I_{2^n}.$$

Решение 7. С помощью (1) найдем

$$U_{IA}^* = \sum_{j=0}^{2^n-1}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(\frac{2}{2^n} - \delta_{jk}\right)|k\rangle\langle j| = U_{IA}.$$

Таким образом, учитывая, что $\langle j|m\rangle = \delta_{jm}$, произведение операторов имеет вид

$$U_{IA}U_{IA}^* = U_{IA}^2 = \sum_{j,k,l,m=0}^{2^n-1}\left(\frac{2}{2^n} - \delta_{jk}\right)\left(\frac{2}{2^n} - \delta_{lm}\right)|k\rangle\langle j|m\rangle\langle l|$$
$$= \sum_{j,k,l=0}^{2^n-1}\left(\frac{2}{2^n} - \delta_{jk}\right)\left(\frac{2}{2^n} - \delta_{lj}\right)|k\rangle\langle l|.$$

Кроме того, вычислим

$$\sum_{j=0}^{2^n-1}\left(\frac{2}{2^n}-\delta_{jk}\right)\left(\frac{2}{2^n}-\delta_{lj}\right) = \sum_{j=0}^{2^n-1}\left(\frac{4}{2^{2n}}-\delta_{jk}\frac{2}{2^n}-\delta_{lj}\frac{2}{2^n}+\delta_{jk}\delta_{lj}\right)$$
$$= \frac{4}{2^n}-\frac{2}{2^n}-\frac{2}{2^n}+\sum_{j=0}^{2^n-1}\delta_{jk}\delta_{lk}$$
$$= \delta_{lk}\sum_{j=0}^{2^n-1}\delta_{jk}$$
$$= \delta_{lk}\,.$$

Следовательно,

$$U_{IA}U_{IA}^* = \sum_{j=0}^{2^n-1}|j\rangle\langle j| = I_{2^n}\,.$$

Задача 8. Пусть $\{\,|0\rangle,|1\rangle\,\}$ — ортонормированный базис в двумерном гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^2$ и

$$U_H|k\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+(-1)^k|1\rangle\right), \quad k\in\{0,1\},$$
$$U_{PS(\theta)} := |00\rangle\langle 00|+|01\rangle\langle 01|+|10\rangle\langle 10|+e^{i\theta}|11\rangle\langle 11|,$$
$$U_{CNOT} := |00\rangle\langle 00|+|01\rangle\langle 01|+|10\rangle\langle 11|+|11\rangle\langle 10|.$$

(i) Показать, что $U_HU_H=I_2$.

(ii) Вычислить

$$(I_2\otimes U_H)U_{PS(\pi)}(I_2\otimes U_H)|ab\rangle$$

и

$$(I_2\otimes U_H)U_{CNOT}(I_2\otimes U_H)|ab\rangle,$$

где $a,b\in\{0,1\}$. Что означают эти преобразования?

Решение 8. (i) Произвольное состояние в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^2$ может быть записано в виде

$$|\psi\rangle := a|0\rangle + b|1\rangle,$$

где $a, b \in \mathbf{C}$ и $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Получим

$$\begin{aligned} U_H U_H |\psi\rangle &= U_H \frac{1}{\sqrt{2}} (a|0\rangle + a|1\rangle + b|0\rangle - b|1\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (2a|0\rangle + 2b|1\rangle) \\ &= a|0\rangle + b|1\rangle \,. \end{aligned}$$

Таким образом, $U_H U_H = I_2$.

(ii) Вычислим

$$\begin{aligned} (I_2 \otimes U_H) U_{PS(\pi)} (I_2 \otimes U_H)|ab\rangle &= (I_2 \otimes U_H) U_{PS(\pi)} \frac{1}{\sqrt{2}} |a\rangle \otimes (|0\rangle + (-1)^b |1\rangle) \\ &= (I_2 \otimes U_H) \frac{1}{\sqrt{2}} |a\rangle \otimes (|0\rangle + (-1)^{a+b} |1\rangle \\ &= \frac{1}{2} |a, a \oplus b\rangle, \end{aligned}$$

где $a \oplus b = a + b \pmod 2$ является операцией XOR. Найдем также величину

$$\begin{aligned} &(I_2 \otimes U_H) U_{CNOT} (I_2 \otimes U_H)|ab\rangle \\ &= (I_2 \otimes U_H) U_{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}} |a\rangle \otimes (|0\rangle + (-1)^b |1\rangle) \\ &= \begin{cases} (I_2 \otimes U_H) \frac{1}{\sqrt{2}} |a\rangle \otimes (|0\rangle + (-1)^b |1\rangle) & a = 0 \\ (I_2 \otimes U_H) \frac{1}{\sqrt{2}} |a\rangle \otimes (|1\rangle + (-1)^b |0\rangle) & a = 1 \end{cases} \\ &= (I_2 \otimes U_H) \frac{1}{\sqrt{2}} |a\rangle \otimes (-1)^{ab} (|0\rangle + (-1)^b |1\rangle) \\ &= (-1)^{ab} |ab\rangle. \end{aligned}$$

Результат первого вычисления — U_{CNOT}, второго — $U_{PS(\pi)}$.

Задача 9. *Вентиль XOR* определяется соотношением

$$U_{XOR} |m\rangle \otimes |n\rangle = |m\rangle \otimes |m \oplus n\rangle,$$

где $m, n \in \{0, 1\}$, и операция $\oplus$ означает сложение по модулю 2. Это преобразование имеет следующие свойства: (a) оно унитарно и поэтому обратимо, (b) оно эрмитово, (c) $m \oplus n = 0$ тогда и только тогда, когда $m = n$. Первый индекс относится к состоянию контролирующего кубита, а второй индекс — к состоянию контролируемого кубита.

(i) Обобщенный квантовый вентиль XOR (*GXOR-вентиль*) действует на две d-мерные квантовые системы ($d > 2$). По аналогии с кубитами назовем эти две системы *кудитами*. Базисные состояния $|m\rangle$ каждого кудита идентифицируются элементами кольца $\mathbf{Z}_d$, которые мы обозначаем числами, $m = 0, 1, \ldots, d-1$; вводятся обычные правила сложения и умножения по модулю d. Определим два оператора:

$$U_{GXOR1}|m\rangle \otimes |n\rangle := |m\rangle \otimes |m \oplus n\rangle$$

и

$$U_{GXOR2}|m\rangle \otimes |n\rangle := |m\rangle \otimes |m \ominus n\rangle,$$

где

$$m \ominus n := (m - n) \text{ по модулю } d.$$

Описать свойства этих двух операторов.

Решение 9. Для оператора U_{GXOR1} можно показать, что он является унитарным, но не эрмитовым при $d > 2$. Следовательно, он больше не равен своему обратному оператору. Обратный оператор к U_{GXOR1} получается с помощью итерирования, т. е.

$$U_{GXOR1}^{-1} = U_{GXOR1}^{d-1} = U_{GXOR1}^{\dagger} \neq U_{GXOR1}.$$

Оператор U_{GXOR2} в частном случае при $d = 2$ сводится к вентилю XOR. Кроме того, этот оператор является унитарным, эрмитовым и

$$m \ominus n = 0 \text{ по модулю } d$$

тогда и только тогда, когда $m = n$.

Задача 10. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^N$ ортонормированный базис

$$|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle, \ldots, |\phi_{N-1}\rangle.$$

(i) Показать, что

$$U := \sum_{k=0}^{N-2} |\phi_k\rangle\langle\phi_{k+1}| + |\phi_{N-1}\rangle\langle\phi_0|$$

является унитарной матрицей.

(ii) Найти $\operatorname{tr}(U)$.

(iii) Найти U^N.

(iv) Доказать или опровергнуть утверждение о том, что U зависит от выбранного базиса.

Подсказка. Рассмотреть $N = 2$, стандартный базис $(1,0)^T$, $(0,1)^T$ и базис $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$.

(v) Показать, что множество

$$\{U, U^2, \ldots, U^N\}$$

образует *коммутативную группу* (*абелеву группу*) относительно матричного умножения. Это множество является подгруппой группы всех матриц перестановок.

(vi) Предположим, что множество, описанное выше, является стандартным базисом. Показать, что матрица U имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение 10. (i) Поскольку $\langle\phi_j|\phi_k\rangle = \delta_{jk}$, получим

$$UU^* = \left(\sum_{k=0}^{N-2} |\phi_k\rangle\langle\phi_{k+1}| + |\phi_{N-1}\rangle\langle\phi_0|\right)\left(\sum_{k=0}^{N-2} |\phi_{k+1}\rangle\langle\phi_k| + |\phi_0\rangle\langle\phi_{N-1}|\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} |\phi_k\rangle\langle\phi_k| = I_N\,.$$

(ii) Очевидно, что

$$\operatorname{tr}(U) = 0,$$

поскольку слагаемые $|\phi_k\rangle\langle\phi_k|$ не входят в сумму (т.е. мы вычисляем след в базисе $|\phi_0\rangle, \ldots, |\phi_{N-1}\rangle$).

(iii) Заметим, что U отображает $|\phi_k\rangle$ в $|\phi_{k-1}\rangle$. Применяя его N раз и используя вычисления по модулю N, получим (т.е. U^N отображает $|\phi_k\rangle$ в $|\phi_{k-N}\rangle$)

$$U^N = I_N .$$

(iv) Для стандартного базиса пространства $\mathbf{C}^2$ $\{(1,0)^T, (0,1)^T\}$

$$U_{std} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Для базиса $\mathbf{C}^2$ $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T\}$

$$U_{had} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Очевидно, что эти две унитарные матрицы различны.
(v) Поскольку $U_N = I_N = U^0$,

$$U^s U^t = U^{s+t} = U^{s+t \bmod N} .$$

Таким образом, множество матриц $\{U, U^2, \ldots, U^N\}$ образует абелеву группу относительно операции матричного умножения, поскольку $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ формирует группу относительно операции сложения по модулю N. Эти две группы являются изоморфными.
(vi) Пусть $\mathbf{e_j}$ — элемент стандартного базиса пространства $\mathbf{C}^n$, у которого на j-ой позиции стоит 1 (нумерация начинается с нуля) и 0 во всех других положениях. Тогда U определяется следующим образом:

$$U = \sum_{k=0}^{N-2} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_{k+1}^T + \mathbf{e}_{N-1}\mathbf{e}_0^T .$$

В произведении $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_{k+1}^T$ множитель $\mathbf{e}_k$ означает строку, а $\mathbf{e}_{k+1}^T$ — столбец матрицы U. Таким образом, требуемое равенство получено.

Задача 11. (i) Пусть σ_x, σ_y и σ_z — спиновые матрицы Паули, а I_2 — единичная матрица 2×2. Найти

$$(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z)(\sigma_x \otimes \sigma_x \otimes I_2 \otimes I_2)(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z) ,$$
$$(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z)(I_2 \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes I_2)(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z) ,$$
$$(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z)(I_2 \otimes I_2 \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x)(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z) .$$

(ii) Подставить σ_y вместо σ_x в вышеприведенных выражениях и вычислить.

(iii) Пусть задана одномерная XY-*модель* с открытыми граничными условиями

$$\widehat{H}_{XY} = -\sum_{j=-N/2+1}^{N/2-1} \left(\frac{1+\gamma}{2}\sigma_{x,j}\sigma_{x,j+1} + \frac{1-\gamma}{2}\sigma_{y,j}\sigma_{y,j+1} \right) - \lambda \sum_{j=-N/2+1}^{N/2} \sigma_{z,j},$$

где параметр λ является интенсивностью магнитного поля, приложенного в направлении z, и параметр γ определяет степень анизотропии спин-спинового взаимодействия, которое ограничено плоскостью xy в спиновом пространстве. Найти

$$\left(\prod_{j=-N/2+1}^{N/2} \sigma_{z,j} \right) \widehat{H}_{XY} \left(\prod_{j=-N/2+1}^{N/2} \sigma_{z,j} \right).$$

Решение 11. (i) Поскольку $\sigma_z^2 = I_2$ и

$$\sigma_z \sigma_x \sigma_z = -\sigma_x,$$

вычисляя первое выражение, получим

$$(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z)(\sigma_x \otimes \sigma_x \otimes I_2 \otimes I_2)(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z) = \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes I_2 \otimes I_2.$$

Аналогично имеем

$$(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z)(I_2 \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes I_2)(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z) = I_2 \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes I_2,$$
$$(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z)(I_2 \otimes I_2 \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x)(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z) = I_2 \otimes I_2 \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x.$$

(ii) Заменим σ_x на σ_y и воспользуемся соотношением $\sigma_z \sigma_y \sigma_z = -\sigma_y$. Получим

$$(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z)(\sigma_y \otimes \sigma_y \otimes I_2 \otimes I_2)(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z) = \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes I_2 \otimes I_2,$$
$$(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z)(I_2 \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes I_2)(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z) = I_2 \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes I_2,$$
$$(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z)(I_2 \otimes I_2 \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y)(\sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z) = I_2 \otimes I_2 \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y.$$

(iii) Используя результаты (i) и (ii) и переходя от $N = 4$ к произвольному N, получим

$$\left(\prod_{j=-N/2+1}^{N/2} \sigma_{z,j} \right) \widehat{H}_{XY} \left(\prod_{j=-N/2+1}^{N/2} \sigma_{z,j} \right) = \widehat{H}_{XY}.$$

Из (ii) и (iii) следует, что гамильтониан $\widehat{H}_{XY}$ инвариантен относительно этого преобразования.

Задача 12. Рассмотрим состояние

$$|D\rangle \otimes |P\rangle,$$

где $|D\rangle$ — состояние, описывающее m-кубитный регистр данных, $|P\rangle$ — состояние, описывающее n-кубитный регистр команд. Пусть G — унитарный оператор, действующий на состояние произведения

$$|D\rangle \otimes |P\rangle \to G(|D\rangle \otimes |P\rangle).$$

Унитарный оператор реализуется следующим образом. Говорят, что унитарный оператор U, действующий на m кубитов регистра данных, реализуется массивом вентилей, если существует состояние $|P_U\rangle$ регистра команд такое, что

$$G(|D\rangle \otimes |P_U\rangle) = (U|D\rangle) \otimes |P'_U\rangle$$

для всех состояний $|D\rangle$ регистра данных и некоторых состояний $|P'_U\rangle$ регистра данных.

(i) Показать, что $|P'_U\rangle$ не зависит от $|D\rangle$.

(ii) Предположим, что разные (с точностью до общей фазы) унитарные операторы $U_1, \ldots U_N$ реализуются некоторым программируемым массивом квантовых вентилей. Показать, что соответствующие программы $|P_1\rangle$, $\ldots$, $|P_N\rangle$ являются взаимно ортогональными.

Решение 12. (i) Рассмотрим

$$G(|D_1\rangle \otimes |P\rangle) = (U|D_1\rangle) \otimes |P'_1\rangle,$$
$$G(|D_2\rangle \otimes |P\rangle) = (U|D_2\rangle) \otimes |P'_2\rangle.$$

Умножим скалярно эти два уравнения и учтем, что $G^\dagger G = I$, $U^\dagger U = I$ и $\langle P|P\rangle = 1$. Получим

$$\langle D_1|D_2\rangle = \langle D_1|D_2\rangle\langle P'_1|P'_2\rangle.$$

Если $\langle D_1|D_2\rangle \neq 0$, то $\langle P'_1|P'_2\rangle = 1$. Таким образом,

$$|P'_1\rangle = |P'_2\rangle.$$

Следовательно, не существует зависимости $|P'_U\rangle$ от $|D\rangle$. Что происходит при $\langle D_1|D_2\rangle = 0$?

(ii) Предположим, что $|P\rangle$ и $|Q\rangle$ — программы, которые реализуют унитарные операторы U_p и U_q, различающиеся лишь изменениями общей фазы. Тогда для произвольного состояния данных $|D\rangle$ выполняются соотношения

$$G(|D\rangle \otimes |P\rangle) = (U_p|D\rangle) \otimes |P'\rangle, \quad G(|D\rangle \otimes |Q\rangle) = (U_q|D\rangle) \otimes |Q'\rangle,$$

где $|P'\rangle$ и $|Q'\rangle$ — состояния регистра команд. Умножая скалярно эти два уравнения и учитывая, что $G^\dagger G = I$, $\langle D|D\rangle = 1$, получим

$$\langle Q|P\rangle = \langle Q'|P'\rangle\langle D|U_q^\dagger U_p|D\rangle.$$

Предположим, что $\langle Q'|P'\rangle \neq 0$. В этом случае

$$\frac{\langle Q|P\rangle}{\langle Q'|P'\rangle} = \langle D|U_q^\dagger U_p|D\rangle.$$

Левая часть этого уравнения не зависит от $|D\rangle$. Поэтому $U_q^\dagger U_p = cI$ для некоторого комплексного числа c. Отсюда следует, что $\langle P'|Q'\rangle \neq 0$ только в том случае, если U_p и U_q совпадают с точностью до общей фазы. Однако, согласно предположению, это не так и, следовательно, $\langle Q'|P'\rangle = 0$. Поэтому

$$\langle Q|P\rangle = 0.$$

Это означает, что программы $|Q\rangle$ и $|P\rangle$ являются ортогональными.

Задача 13. (i) Пусть

$$M := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Является ли матрица M унитарной?

(ii) Пусть

$$U_H := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad U_S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

и

$$U_{CNOT2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Показать, что матрица M может быть представлена в виде

$$M = U_{CNOT2}(I_2 \otimes U_H)(U_S \otimes U_S).$$

(iii) Пусть $SO(4)$ — специальная ортогональная группа Ли, и $SU(2)$ — специальная унитарная группа Ли. Показать, что для любой вещественной ортогональной матрицы $U \in SO(4)$ матрица MUM^{-1} является кронекеровым произведением двух двумерных специальных унитарных матриц, т. е.

$$MUM^{-1} \in SU(2) \otimes SU(2).$$

Решение 13. (i) Поскольку $MM^* = I_4$, матрица M унитарна.

(ii) Справедливо равенство

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Покажем, что для любой матрицы $A \otimes B \in SU(2) \otimes SU(2)$

$$M^{-1}(A \otimes B)M \in SO(4).$$

Любая матрица $A \in SU(2)$ может быть записана в виде

$$R_z(\alpha)R_y(\theta)R_z(\beta)$$

для некоторых $\alpha, \beta, \theta \in \mathbf{R}$, где

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \qquad R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, любая матрица $A \otimes B \in SU(2) \otimes SU(2)$ может быть представлена как произведение матриц вида $V \otimes I_2$ или $I_2 \otimes V$, где в качестве V выступает матрица $R_y(\theta)$ или $R_z(\alpha)$. Далее необходимо показать, что $M^{-1}(V\otimes I_2)M$ и $M^{-1}(I_2\otimes V)M$ принадлежат $SO(4)$. Расписывая произведение, получим

$$M^{-1}(R_y(\theta)\otimes I_2)M=\begin{pmatrix}\cos(\theta/2) & 0 & 0 & -\sin(\theta/2)\\ 0 & \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) & 0\\ 0 & -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) & 0\\ \sin(\theta/2) & 0 & 0 & \cos(\theta/2)\end{pmatrix},$$

$$M^{-1}(R_z(\alpha)\otimes I_2)M=\begin{pmatrix}\cos(\alpha/2) & \sin(\alpha/2) & 0 & 0\\ -\sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos(\alpha/2) & -\sin(\alpha/2)\\ 0 & 0 & \sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2)\end{pmatrix}.$$

Аналогичные соотношения получаются для $I_2\otimes R_y(\theta)$ и $I_2\otimes R_z(\alpha)$. Поскольку отображение

$$A\otimes B\to M^{-1}(A\otimes B)M$$

является взаимно-однозначным (обратимым) и группы Ли $SU(2)\otimes SU(2)$ и $SO(4)$ имеют одинаковую топологическую размерность, то данное отображение определяет изоморфизм между этими двумя группами Ли. В квантовых вычислениях M называется *магическим вентилем*.

Задача 14. Рассмотрим три двумерных гильбертова пространства $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_3$ и нормированное состояние произведений

$$|\psi\rangle=\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\sum_{\ell=0}^{1}c_{jk\ell}|j\rangle\otimes|k\rangle\otimes|\ell\rangle$$

в гильбертовом пространстве, образованном произведением $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_3$. Пусть U_1, U_2, U_3 — унитарные операторы, действующие в этих гильбертовых пространствах. Согласно *первой основной теореме* теории инвариантов, примененной к U_1, U_2, U_3, любой полином по $c_{jk\ell}$, инвариантный относительно действия на $|\psi\rangle$ локального унитарного преобразования $U_1\otimes U_2\otimes U_3$, является суммой однородных многочленов четной степени (например, $2r$). При $r=1$ получим

$$P_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{c})=\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{\ell_1=0}^{1}c_{j_1k_1\ell_1}c^*_{j_1k_{\sigma_1(1)}\ell_{\sigma_2(1)}},$$

где σ_1 и σ_2 — перестановки единиц. Обозначим через e единичную перестановку. При $r = 2$ получим

$$P_{\sigma_1\sigma_2}(\mathbf{c}) = \sum_{j_1=0}^{1}\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{\ell_1=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\sum_{\ell_2=0}^{1} c_{j_1k_1\ell_1}c_{j_2k_2\ell_2}c^*_{j_1k_{\sigma_1(1)}\ell_{\sigma_2(1)}}c^*_{j_2k_{\sigma_1(2)}\ell_{\sigma_2(2)}}.$$

(i) Вычислить инварианты.

(ii) Найти связь между частичными следами

$$\begin{aligned}\rho_1 &:= \mathrm{tr}_{23}(|\psi\rangle\langle\psi|),\\ \rho_2 &:= \mathrm{tr}_{31}(|\psi\rangle\langle\psi|),\\ \rho_3 &:= \mathrm{tr}_{12}(|\psi\rangle\langle\psi|)\end{aligned}$$

оператора плотности

$$\rho := |\psi\rangle\langle\psi|.$$

Решение 14. (i) Очевидно, в случае $r = 1$ (степень 2) рассматривается только единичная перестановка, т. е. $\sigma_1 = \sigma_2 = e$, где

$$e(1) = 1, \qquad e(2) = 2.$$

Поэтому получается лишь один инвариант, а именно:

$$I_0 = \sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\sum_{\ell=0}^{1} c_{jk\ell}c^*_{jk\ell} = \langle\psi|\psi\rangle = 1,$$

который является условием нормировки. В случае $r = 2$ (степень 4) можно найти четыре линейно независимых инварианта четвертого порядка, поскольку

$$\begin{aligned}e(1) &= 1, \quad e(2) = 2,\\ \sigma(1) &= 2, \quad \sigma(2) = 1.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_1 = P_{ee}(\mathbf{c}) = \sum_{j_1=0}^{1}\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{\ell_1=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\sum_{\ell_2=0}^{1} c_{j_1k_1\ell_1}c^*_{j_1k_1\ell_1}c_{j_2k_2\ell_2}c^*_{j_2k_2\ell_2} = \langle\psi|\psi\rangle^2,$$

$$I_2 = P_{e\sigma}(\mathbf{c}) = \sum_{j_1=0}^{1}\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{\ell_1=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\sum_{\ell_2=0}^{1} c_{j_1k_1\ell_1}c^*_{j_1k_1\ell_2}c_{j_2k_2\ell_2}c^*_{j_2k_2\ell_1},$$

$$I_3 = P_{\sigma e}(\mathbf{c}) = \sum_{j_1=0}^{1}\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{\ell_1=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\sum_{\ell_2=0}^{1} c_{j_1k_1\ell_1}c^*_{j_1k_2\ell_1}c_{j_2k_2\ell_2}c^*_{j_2k_1\ell_2},$$

$$I_4 = P_{\sigma\sigma}(\mathbf{c}) = \sum_{j_1=0}^{1}\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{\ell_1=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1}\sum_{\ell_2=0}^{1} c_{j_1k_1\ell_1}c^*_{j_1k_2\ell_2}c_{j_2k_2\ell_2}c^*_{j_2k_1\ell_1}.$$

(ii) Очевидно,

$$I_2 = \operatorname{tr}(\rho_3^2),$$
$$I_3 = \operatorname{tr}(\rho_2^2),$$
$$I_4 = \operatorname{tr}(\rho_1^2).$$

Задача 15. Рассмотрим два гильбертовых пространства $\mathcal{H}_{reg}$, $\mathcal{H}_{sys}$ и состояние, образованное тензорным произведением

$$|\psi\rangle = (\alpha|0^{reg}\rangle + \beta|1^{reg}\rangle) \otimes |0^{sys}\rangle$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{reg} \otimes \mathcal{H}_{sys}$, где индекс reg означает регистр, и sys — систему. Рассмотрим операцию обмена (вентиль обмена)

$$U_{swap}((\alpha|0^{reg}\rangle + \beta|1^{reg}\rangle) \otimes |0^{sys}\rangle) =$$
$$= |0^{reg}\rangle \otimes (\alpha|0^{sys}\rangle + \beta|1^{sys}\rangle).$$

Дать пояснения данной операции с точки зрения физики.

Решение 15. Образование такой суперпозиции могло бы нарушить законы сохранения (например, заряда), и в этом случае она запрещается правилами суперотбора.

Задача 16. *Вентиль Тоффоли* — это унитарный оператор вида

$$U_T|a, b, c\rangle = |a, b, ab + c\rangle,$$

действующий в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^8$, где $a, b, c \in \{0, 1\}$, и операция ab означает операцию И (AND) над a и b. Знак суммы $+$ означает сложение по модулю два.

(i) Составить таблицу истинности.

(ii) Найти матричное представление для стандартного базиса.

Вентиль Тоффоли является расширением вентиля CNOT.

Решение 16. (i) Таблица имеет следующий вид:

a	b	c	a	b	$ab+c$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

(ii) Матричное представление вентиля Тоффоли определяется матрицей перестановки

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Задача 17. *Вентиль Фредкина* — это унитарный оператор

$$U_F|c,x,y\rangle = |c, cx+\bar{c}y, \bar{c}x+cy\rangle,$$

действующий в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^8$, где $c,x,y \in \{0,1\}$.

(i) Рассмотреть случаи $c=0$ и $c=1$.

(ii) Найти матричное представление для стандартного базиса.

Решение 17. (i) Если $c=0$, то $\bar{c}=1$. Поэтому

$$cx=0, \quad \bar{c}x=x, \quad cy=0, \quad c\bar{y}=y.$$

Таким образом,

$$U_F|0,x,y\rangle = |0,y,x\rangle.$$

Если $c=1$, то $\bar{c}=0$. Следовательно, $cx=x$, $\bar{c}x=0$, $cy=y$, $\bar{c}y=0$. Получим

$$U_F|1,x,y\rangle = |1,x,y\rangle.$$

То есть c является контролирующим битом. Если $c = 0$, то x и y меняются местами. Если $c = 1$, то x и y остаются теми же самыми.

(ii) Матричное представление вентиля Фредкина определяется матрицей перестановки

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Глава 7

Измерение

В моделях квантового измерения рассматриваются типы измерений, которые можно провести для квантовых систем, а также способы определения вероятности того, что измерение дает заданный результат. Также важен учет влияния, оказываемого измерением на состояние квантовой системы.

Задача 1. Предположим, что Алиса управляет устройством, которое подготавливает квантовую систему, и Боб проводит измерение для системы и записывает результаты. Устройство подготовки задает то состояние, в котором будет находиться система. Событию подготовительного считывания j, где $j = 1, 2, \ldots, m$, с подготовительного устройства ставится в соответствие линейный неотрицательно определенный оператор Λ_j, действующий в пространстве состояний системы. Операторы Λ_j не обязаны быть ортогональны друг другу. Для устройства измерения также происходит событие считывания k, где $k = 1, 2, \ldots, n$ — индекс, который показывает результат измерения. Устройству измерения ставится в соответствие оператор устройства измерения Γ_k, который также линеен и неотрицательно определен. Например, в случае *измерения фон Неймана* этот оператор будет оператором проектирования чистого состояния. Пусть

$$\Lambda := \sum_{j=1}^{m} \Lambda_j, \qquad \Gamma := \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k.$$

Дать толкование следующих вероятностей:

$$p(j,k) = \frac{\operatorname{tr}(\Lambda_j \Gamma_k)}{\operatorname{tr}(\Lambda\Gamma)}, \tag{1}$$

$$p(j) = \frac{\operatorname{tr}(\Lambda_j \Gamma)}{\operatorname{tr}(\Lambda\Gamma)}, \tag{2}$$

$$p(k) = \frac{\operatorname{tr}(\Lambda\Gamma_k)}{\operatorname{tr}(\Lambda\Gamma)}, \tag{3}$$

$$p(k|j) = \frac{\operatorname{tr}(\Lambda_j\Gamma_k)}{\operatorname{tr}(\Lambda_j\Gamma)}, \tag{4}$$

$$p(j|k) = \frac{\operatorname{tr}(\Lambda_j\Gamma_k)}{\operatorname{tr}(\Lambda\Gamma_k)}. \tag{5}$$

Решение 1. Выражение (1) задает совместное распределение вероятностей, сопоставленное отдельной точке (j, k) в пространстве выборок. Выражение (2) — это безусловная вероятность того, что в результате случайно выбранного эксперимента с зарегистрированным составным событием было подготовлено событие j. Выражение (3) — безусловная вероятность получить результат измерения k при заданном составном событии. Равенство (4) — это условная вероятность того, что, если записанное составное событие включает событие j, оно также включает событие k. То есть, это вероятность того, что событие, зарегистрированное Бобом, состоит в обнаружении состояния, соответствующего Γ_k, если состояние, подготовленное Алисой в эксперименте, соответствует оператору Λ_j. Это выражение можно использовать для прогноза. Для того, чтобы вычислить требуемую вероятность, зная оператор Λ_j, соответствующий событию подготовки j, все возможные операторы Γ_k должны быть известны, т. е. должно быть известно математическое описание работы устройства измерения. Аналогично (5) — это вероятность того, что состояние, подготовленное Алисой, соответствует оператору Λ_j, если событие, зарегистрированное Бобом, состоит в обнаружении состояния, соответствующего Γ_k. Это выражение можно использовать для обратной связи, если Γ_k и все операторы Λ_j устройства подготовки известны.

Задача 2. Пусть A — эрмитова матрица $n \times n$. В этом случае собственные числа λ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ являются вещественными. Предположим, что все числа различны. Матрицу A можно записать в виде (*спектральное представление*)

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j, \qquad P_j = |u_j\rangle\langle u_j|, \tag{1}$$

где $|u_j\rangle$ — нормированные собственные векторы матрицы A, и λ_j — соответствующие собственные значения. Для проективных операторов P_j верно равенство $P_j P_k = \delta_{jk} P_j$. Любая наблюдаемая A определяет некоторое *проективное измерение*. Состояние $|\psi\rangle$ в пространстве $\mathbf{C}^n$, подвергнутое проективному измерению с помощью наблюдаемой матрицы

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j, \qquad P_j = |u_j\rangle\langle u_j|,$$

переходит в состояние

$$\frac{P_j|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_j|\psi\rangle}}$$

с *вероятностью*

$$p(j) = \langle\psi|P_j|\psi\rangle \equiv \langle\psi|u_j\rangle\langle u_j|\psi\rangle = |\langle\psi|u_j\rangle|^2.$$

Собственные числа λ_j считаются измеренными. Если система подвергается тому же самому измерению сразу после проективного измерения, достоверно можно сказать, что результат будет тем же. *Математическое ожидание* измеренной величины определяется по формуле

$$\langle A\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p(j) = \langle\psi|A|\psi\rangle.$$

(i) Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти спектральное представление A.

(ii) Пусть

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислить

$$p(\lambda_1) = \langle\psi|P_{\lambda_1}|\psi\rangle, \qquad p(\lambda_2) = \langle\psi|P_{\lambda_2}|\psi\rangle.$$

Решение 2. (i) Собственные числа матрицы A равны $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$. Соответствующие собственные векторы равны

$$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad |u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$P_{\lambda_1} = |u_1\rangle\langle u_1| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}(1-i) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix},$$

$$P_{\lambda_2} = |u_2\rangle\langle u_2| = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}(1i) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}$$

и $I_2 = P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2}$, и $A = P_{\lambda_1} - P_{\lambda_2}$.

(ii) Перемножая, получим

$$P_{\lambda_1}|\psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1-i\\ 1+i\end{pmatrix},$$

$$P_{\lambda_2}|\psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1+i\\ 1-i\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$p(\lambda_1) = \langle\psi|P_{\lambda_1}|\psi\rangle = \frac{1}{2}, \quad p(\lambda_2) = \langle\psi|P_{\lambda_2}|\psi\rangle = \frac{1}{2}.$$

Задача 3. *Положительное операторнозначное измерение (ПОЗИ — англ. Positive operator-valued measure (POVM))* — это множество

$$\{E_j : j = 1, 2, \ldots, n\}$$

неотрицательных (неотрицательно определенных) операторов, удовлетворяющих условию

$$\sum_{j=1}^{n} E_j = I,$$

где I — тождественный оператор. Другими словами, разложение единицы (тождественного оператора) с помощью неотрицательных операторов называется положительным операторнозначным измерением (ПОЗИ). Когда состояние $|\psi\rangle$ подвергается такому ПОЗИ, исход j появляется с вероятностью

$$p(j) = \langle\psi|E_j|\psi\rangle.$$

Рассмотрим систему кубитов. Пусть

$$E_1 = |0\rangle\langle 0|,$$
$$E_2 = |1\rangle\langle 1|$$

и

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$

Вычислить $p(1)$ и $p(2)$.

Решение 3. Поскольку $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$ и $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$, получим

$$p(1) = \langle\psi|E_1|\psi\rangle = \frac{1}{2}, \qquad p(2) = \langle\psi|E_2|\psi\rangle = \frac{1}{2}.$$

Задача 4. Рассмотрим состояния

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|11\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle\otimes|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\otimes|1\rangle$$

и

$$|\phi\rangle = |11\rangle \equiv |1\rangle\otimes|1\rangle.$$

Найти $p := |\langle\phi|\psi\rangle|^2$, т.е. вероятность того, что $|\psi\rangle$ находится в состоянии $|\phi\rangle$.

Решение 4. Поскольку $\langle 11|00\rangle = 0$ и $\langle 11|11\rangle = 1$, получим

$$p = \frac{2}{3}.$$

Задача 5. Рассмотрим состояние

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\otimes|1\rangle - |1\rangle\otimes|0\rangle)$$

и

$$\langle 0|\otimes I_2,$$

где I_2 — единичная матрица 2×2. Вычислить

$$(\langle 0|\otimes I_2)|\psi\rangle.$$

Сделать выводы.

Решение 5. Поскольку $\langle 0|0\rangle = 1$, $\langle 0|1\rangle = 0$ и $I_2|1\rangle = |1\rangle$, получим

$$(\langle 0| \otimes I_2)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

Первая система измеряется с вероятностью $1/2$, и система переходит (коллапсирует) в состояние $|1\rangle$ (*частичное измерение*).

Задача 6. Рассмотрим состояния

$$|0\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^2$ и состояние

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle)$$

в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^4$. Пусть ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$)

$$|\alpha\rangle := \cos\alpha|0\rangle + \sin\alpha|1\rangle, \qquad |\beta\rangle := \cos\beta|0\rangle + \sin\beta|1\rangle$$

— состояния в $\mathbf{C}^2$. Вычислить вероятность

$$p(\alpha, \beta) := |(\langle\alpha| \otimes \langle\beta|)|\psi\rangle|^2.$$

Описать p как функцию α и β.

Решение 6. Из соотношений $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$, $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$ следует, что

$$(\langle 0| \otimes \langle 1|)(|0\rangle \otimes |1\rangle) = 1, \quad (\langle 1| \otimes \langle 0|)(|1\rangle \otimes |0\rangle) = 1.$$

Получим

$$p(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta)^2.$$

Используя тригонометрическое тождество, получим

$$p(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\sin^2(\alpha - \beta).$$

Таким образом, $p(\alpha, \beta) \leqslant 1/2$ для всех α, β, поскольку $\sin^2 \phi \leqslant 1$ для всех $\phi \in \mathbf{R}$. Например, если $\alpha = \beta$, то $p = 0$. Если $\alpha - \beta = \pi/4$, то $p = 1/2$.

Задача 7. Обозначим через ($\theta \in \mathbf{R}$)

$$P(\theta) := e^{i\theta}|0\rangle\langle 0| + e^{-i\theta}|1\rangle\langle 1| \equiv e^{i\theta}(|0\rangle\langle 0| + e^{-i2\theta}|1\rangle\langle 1|)$$

преобразование изменения фазы для единичного кубита.

(i) Вычислить ($\phi \in \mathbf{R}$)

$$|s(\theta, \phi)\rangle := P\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) U_H P\left(\frac{\theta}{2}\right) U_H |0\rangle.$$

(ii) Определить вероятность того, что состояние $|s(\theta, \phi)\rangle$ находится в состоянии

$$(a)\ |0\rangle, \qquad (b)\ |1\rangle, \qquad (c)\ |s(\theta', \phi')\rangle.$$

Вещественные параметры θ и ϕ можно рассматривать как сферические координаты, определяющие любой кубит на единичной сфере, называемой *сферой Блоха*.

Решение 7. (i) Выполним преобразования

$$\begin{aligned}
|s(\theta, \phi)\rangle &= P\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) U_H P\left(\frac{\theta}{2}\right) U_H |0\rangle \\
&= P\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) U_H P\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\
&= P\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) U_H \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\theta/2}|0\rangle + e^{-i\theta/2}|1\rangle) \\
&= P\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \frac{1}{2}\left(e^{i\theta/2}(|0\rangle + |1\rangle) + e^{-i\theta/2}(|0\rangle - |1\rangle)\right) \\
&= P\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + i\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right) \\
&= e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{-i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right) \\
&= e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2})}\left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right).
\end{aligned}$$

Самое общее состояние одиночного кубита описывается тремя вещественными параметрами: $\theta, \phi, \sigma \in \mathbf{R}$

$$e^{i\sigma}\left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right).$$

Параметр σ представляет *общую фазу* и может не учитываться, поскольку его нельзя обнаружить в модели измерения. То же самое верно и при выводе общей фазы $\exp(i(\pi/4 - \phi/2))$. Таким образом, θ и ϕ могут использоваться для определения состояния произвольного одиночного кубита $|s(\theta, \phi)\rangle$.

(ii) Для вероятности в случае (a) получим

$$|\langle 0|s(\theta,\phi)\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Для вероятности (b):

$$|\langle 1|s(\theta,\phi)\rangle|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Для вероятности в третьем случае $|\langle s(\theta',\phi')|s(\theta,\phi)\rangle|^2$:

$$\left|e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\frac{\phi'}{2}}\cos\frac{\theta'}{2}\langle 0|+e^{-i\frac{\phi'}{2}}\sin\frac{\theta'}{2}\langle 1|\right)e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{-i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle+e^{i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\right)\right|^2.$$

Таким образом,

$$|\langle s(\theta',\phi')|s(\theta,\phi)\rangle|^2 = \left|\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}e^{\frac{i}{2}(\phi'-\phi)} + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta'}{2}e^{\frac{i}{2}(\phi-\phi')}\right|^2,$$

где использовался тот факт, что $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$ и $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$. Отсюда получим

$$|\langle s(\theta',\phi')|s(\theta,\phi)\rangle|^2 = \cos^2\frac{1}{2}(\phi'-\phi)\cos^2\frac{1}{2}(\theta'-\theta) + \sin^2\frac{1}{2}(\phi'-\phi)\cos^2\frac{1}{2}(\theta'+\theta).$$

Если $\theta' = \theta$ и $\phi' = \phi$, вероятность равна единице.

Задача 8. Рассмотрим конечномерное гильбертово пространство $\mathbf{C}^n$ при $n > 2$. Введем ортонормированный базис

$$\{|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |n-1\rangle\}.$$

Пусть E — любой оператор проектирования в этом пространстве, и $E_j := |j\rangle\langle j|$, где $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Пусть вероятность получения 1 при измерении E равна $P(E)$. Тогда

$$P(I) = 1, \quad 0 \leqslant P(E) \leqslant 1, \quad P(0) = 0, \quad E_j E_k = \delta_{jk} E_j.$$

$$P(E_0 + E_1 + \cdots + E_{n-1}) = P(E_0) + P(E_1) + \cdots + P(E_{n-1}). \qquad (1)$$

Состояние s определяется функцией $P(E)$, которая удовлетворяет (1). *Теорема Глисона* утверждает, что для любой вероятности $P(E)$, удовлетворяющей (1), существует матрица плотности ρ такая, что

$$P(E) = \mathrm{tr}(\rho E).$$

Другими словами, s описывается матрицей плотности ρ. Показать, что теорема Глисона не выполняется в двухмерных гильбертовых пространствах.

Решение 8. Рассмотрим характеристическое уравнение в двухмерном гильбертовом пространстве

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})|\mathbf{m}\rangle = |\mathbf{m}\rangle,$$

где $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} := \sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор ($\|\mathbf{n}\| = 1$)

$$\mathbf{n} := (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

и $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \phi < 2\pi$, и

$$|\mathbf{m}\rangle := \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Оператор проектирования на $|\mathbf{m}\rangle$ имеет вид

$$E_{\mathbf{m}} \equiv |\mathbf{m}\rangle\langle\mathbf{m}| = \begin{pmatrix} \cos^2\dfrac{\theta}{2} & \dfrac{1}{2}e^{-i\phi}\sin\theta \\ \dfrac{1}{2}e^{i\phi}\sin\theta & \sin^2\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix} = E(\theta, \phi),$$

поскольку $\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2}\sin\theta$. Соотношение (1) выполняется, и

$$P(E_{\mathbf{m}} + E_{-\mathbf{m}}) = P(E_{\mathbf{m}}) + P(E_{-\mathbf{m}}) = P(I) = 1, \quad E_{\mathbf{m}}E_{-\mathbf{m}} = 0.$$

Подобрать функции распределения вероятностей $P_{\mathbf{m}} = P(\theta, \phi)$ такие, что не существует матрицы плотности ρ, не составляет труда. Примером такой функции является функция

$$P(\theta, \phi) = \frac{1}{2} + \frac{\cos^3 \theta}{2}.$$

Задача 9. Рассмотрим два кубита в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^2$:

$$|\psi_1\rangle := \cos(\theta_1/2)|0\rangle + \sin(\theta_1/2)e^{i\phi_1}|1\rangle,$$
$$|\psi_2\rangle := \cos(\theta_2/2)|0\rangle + \sin(\theta_2/2)e^{i\phi_2}|1\rangle.$$

(i) Найти состояние, образованное тензорным произведением $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ в $\mathbf{C}^4$.

(ii) Рассмотрим *состояние кутрита* в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^3$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle).$$

Чтобы закодировать состояние $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$, используется состояние $|\phi\rangle$ и проводятся проективные измерения состояния $|\phi\rangle \otimes (|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle)$, определяемые операторами проектирования P_0, P_1, P_2, P_3, действующими в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^3 \otimes \mathbf{C}^4$:

$$\begin{aligned} P_0 :=\ & |0\rangle\langle 0| \otimes (|1\rangle \otimes |0\rangle\langle 1| \otimes \langle 0|) \\ +\ & |1\rangle\langle 1| \otimes (|0\rangle \otimes |1\rangle\langle 0| \otimes \langle 1|) + |2\rangle\langle 2| \otimes (|1\rangle \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes \langle 1|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 :=\ & |0\rangle\langle 0| \otimes (|0\rangle \otimes |1\rangle\langle 0| \otimes \langle 1|) \\ +\ & |1\rangle\langle 1| \otimes (|1\rangle \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes \langle 1|) + |2\rangle\langle 2| \otimes (|0\rangle \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes \langle 0|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 :=\ & |0\rangle\langle 0| \otimes (|1\rangle \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes \langle 1|) \\ +\ & |1\rangle\langle 1| \otimes (|0\rangle \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes \langle 0|) + |2\rangle\langle 2| \otimes (|1\rangle \otimes |0\rangle\langle 1| \otimes \langle 0|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 :=\ & |0\rangle\langle 0| \otimes (|0\rangle \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes \langle 0|) \\ +\ & |1\rangle\langle 1| \otimes (|1\rangle \otimes |0\rangle\langle 1| \otimes \langle 0|) + |2\rangle\langle 2| \otimes (|0\rangle \otimes |1\rangle\langle 0| \otimes \langle 1|). \end{aligned}$$

Найти вероятность

$$p_0 := (\langle\phi| \otimes \langle\psi|)P_0(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle).$$

Решение 9. (i) Выполнив умножение, найдем искомое состояние

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \\ &= \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}|0\rangle \otimes |0\rangle + \sin\frac{\theta_1}{2}e^{i\phi_1}\cos\frac{\theta_2}{2}|1\rangle \otimes |0\rangle \\ &\quad + \cos\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}e^{i\phi_2}|0\rangle \otimes |1\rangle + \sin\frac{\theta_1}{2}e^{i\phi_1}\sin\frac{\theta_2}{2}e^{i\phi_2}|1\rangle \otimes |1\rangle.\end{aligned}$$

(ii) Используя результат из (i), получим

$$\begin{aligned}&P_0(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle \otimes \sin\frac{\theta_1}{2}e^{i\phi_1}\cos\frac{\theta_2}{2}|1\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle \otimes \cos\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}e^{i\phi_2}|0\rangle \otimes |1\rangle \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}}|2\rangle \otimes \sin\frac{\theta_1}{2}e^{i\phi_1}\sin\frac{\theta_2}{2}e^{i\phi_2}|1\rangle \otimes |1\rangle.\end{aligned}$$

Тогда искомая вероятность равна

$$\begin{aligned}&(\langle\phi| \otimes \langle\psi|)P_0(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle) \\ &= \frac{1}{3}\sin\frac{\theta_1}{2}e^{i\phi_1}\cos\frac{\theta_2}{2}\langle\psi|(|1\rangle \otimes |0\rangle) + \frac{1}{3}\cos\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}e^{i\phi_2}\langle\psi(|0\rangle \otimes |1\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{3}\sin\frac{\theta_1}{2}e^{i\phi_1}\sin\frac{\theta_2}{2}e^{i\phi_2}\langle\psi(|1\rangle \otimes |1\rangle).\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\langle\psi|(|1\rangle \otimes |0\rangle) &= \sin\frac{\theta_1}{2}e^{-i\phi_1}\cos\frac{\theta_2}{2}, \\ \langle\psi|(|0\rangle \otimes |1\rangle) &= \cos\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}e^{-i\phi_2}, \\ \langle\psi|(|1\rangle \otimes |1\rangle) &= \sin\frac{\theta_1}{2}e^{-i\phi_1}\sin\frac{\theta_2}{2}e^{-i\phi_2},\end{aligned}$$

используя тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, получим окончательное соотношение для вероятности:

$$(\langle\phi| \otimes \langle\psi|)P_0(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle) = \frac{1}{3}\left(1 - \cos^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2}\right).$$

Глава 8

Запутывание

Запутывание — это характерная черта квантовой механики, которая заставляет полностью отступить от классического способа мышления. Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ — два конечномерных гильбертовых пространства, и пусть $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. В этом случае говорят, что $|\psi\rangle$ является *незапутанным*, *сепарабельным* или образованным *тензорным произведением состояний подсистем*, если существуют состояния $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ и $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$ такие, что $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$, в иных случаях состояние $|\psi\rangle$ называют *запутанным*.

Задача 1. Можно ли *ЭПР-состояние* (*состояние Эйнштейна–Подольского–Розена*)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle)$$

в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^4$ записать в виде состояния произведения?

Решение 1. Это состояние нельзя записать в виде состояния произведения. Предположим, что

$$(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) \otimes (d_0|0\rangle + d_1|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle), \quad c_0, c_1, d_0, d_1 \in \mathbf{C},$$

где $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$ и $|d_0|^2 + |d_1|^2 = 1$. Получаем следующую систему уравнений:

$$c_0 d_0 = 0, \quad c_0 d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_1 d_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_1 d_1 = 0.$$

Эта система уравнений не имеет решения. Поэтому ЭПР-состояние нельзя записать в виде состояния произведения. ЭПР-состояние является *запутанным*.

Задача 2. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$ и унитарную матрицу 2×2

$$U(\theta, \phi) := \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Какие из следующих состояний являются запутанными?

$$\text{(i)} \quad \Big(U(\theta_1,\phi_1)\otimes U(\theta_2,\phi_2)\Big)(1,0,0,0)^T,$$

$$\text{(ii)} \quad \Big(U(\theta_1,\phi_1)\otimes U(\theta_2,\phi_2)\Big)(0,0,0,1)^T,$$

$$\text{(iii)} \quad \Big(U(\theta_1,\phi_1)\otimes U(\theta_2,\phi_2)\Big)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^T,$$

где символ $\otimes$ означает произведение Кронекера, и символ ^{T} — операцию транспонирования.

Решение 2. Учитывая то, что вектор $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbf{C}^4$ является сепарабельным тогда и только тогда, когда $x_1x_4 = x_2x_3$, получим

$$U(\theta_1,\phi_1)(1,0)^T \otimes U(\theta_2,\phi_2)(1,0)^T = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_1}{2} \\ -e^{i\phi_1}\sin\frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_2}{2} \\ -e^{i\phi_2}\sin\frac{\theta_2}{2} \end{pmatrix},$$

$$U(\theta_1,\phi_1)(0,1)^T \otimes U(\theta_2,\phi_2)(0,1)^T = \begin{pmatrix} e^{-i\phi_1}\sin\frac{\theta_1}{2} \\ \cos\frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\phi_2}\sin\frac{\theta_2}{2} \\ \cos\frac{\theta_2}{2} \end{pmatrix}.$$

Применим критерий сепарабельности.

В случае (i) получим

$$\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}e^{i\phi_1}\sin\frac{\theta_1}{2}e^{i\phi_2}\sin\frac{\theta_2}{2} =$$
$$= e^{i\phi_1}\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}e^{i\phi_2}\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}.$$

То есть это состояние не является запутанным.

В случае (ii):

$$e^{-i\phi_1}\sin\frac{\theta_1}{2}e^{-i\phi_2}\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} =$$
$$= e^{-i\phi_1}\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}e^{-i\phi_2}\cos\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}.$$

Это состояние также не является запутанным.

В случае (iii):

$$U(\theta_1,\phi_1)(1,0)^T\otimes U(\theta_2,\phi_2)(1,0)^T + U(\theta_1,\phi_1)(0,1)^T\otimes U(\theta_2,\phi_2)(0,1)^T$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} + e^{-i(\phi_1+\phi_2)}\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2} \\ \cos\frac{\theta_2}{2}e^{-i\phi_1}\sin\frac{\theta_1}{2} - \cos\frac{\theta_1}{2}e^{i\phi_2}\sin\frac{\theta_2}{2} \\ \cos\frac{\theta_1}{2}e^{-i\phi_2}\sin\frac{\theta_2}{2} - \cos\frac{\theta_2}{2}e^{i\phi_1}\sin\frac{\theta_1}{2} \\ \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2} + e^{i(\phi_1+\phi_2)}\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2} \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\cos^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2} + \sin^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_2}{2} \neq -\cos^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_2}{2} - \sin^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2}$$
$$= \cos^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2} + \sin^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_2}{2} - 1,$$

это состояние является запутанным.

Задача 3. Общее чистое состояние $|\Psi\rangle$ двух кубитов можно записать в виде

$$|\Psi\rangle = e^{i\phi_0}\cos\theta_0|00\rangle + e^{i\phi_1}\sin\theta_0\cos\theta_1|01\rangle$$
$$+e^{i\phi_2}\sin\theta_0\sin\theta_1\cos\theta_2|10\rangle + e^{i\phi_3}\sin\theta_0\sin\theta_1\sin\theta_2|11\rangle,$$

где ϕ_j и θ_k выбираются равномерно распределенными в соответствии с *мерой Хаара*

$$d\mu = \frac{1}{(2\pi)^4}d(\sin\theta_0)^6 d(\sin\theta_1)^4 d(\sin\theta_2)^2 d\phi_0 d\phi_1 d\phi_2 d\phi_3, \qquad (2)$$

где
$$0 \leqslant \phi_j < 2\pi, \qquad 0 \leqslant \theta_k < \frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

а $j = 0, 1, 2, 3$ и $k = 0, 1, 2$. Дополнительная общая случайная фаза $e^{i\phi_0}$ учитывается для сохранения согласованности с $SU(n)$, где $n = 4$. В случае чистого состояния двух кубитов *запутанность* (tangle) τ определяется по формуле
$$\tau := 4 \det \rho_A, \tag{4}$$

где ρ_A — *приведенная (редуцированная) матрица плотности*, получаемая из исходной двухкубитовой матрицы плотности путем взятия следа по переменным, относящимся к кубиту B (и наоборот ρ_B получается аналогично путем перестановки A и B). Запутанность τ — это мера запутывания. Вычислите τ.

Решение 3. С помощью (1) найдем матрицу плотности размера 4×4
$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \psi_0\psi_0^* & \psi_0\psi_1^* & \psi_0\psi_2^* & \psi_0\psi_3^* \\ \psi_1\psi_0^* & \psi_1\psi_1^* & \psi_1\psi_2^* & \psi_1\psi_3^* \\ \psi_2\psi_0^* & \psi_2\psi_1^* & \psi_2\psi_2^* & \psi_2\psi_3^* \\ \psi_3\psi_0^* & \psi_3\psi_1^* & \psi_3\psi_2^* & \psi_3\psi_3^* \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где
$$\psi_0 = e^{i\phi_0}\cos\theta_0, \quad \psi_1 = e^{i\phi_1}\sin\theta_0\cos\theta_1$$
$$\psi_2 = e^{i\phi_2}\sin\theta_0\sin\theta_1\cos\theta_2, \quad \psi_3 = e^{i\phi_3}\sin\theta_0\sin\theta_1\sin\theta_2. \tag{6}$$

Используя базис
$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes I_2, \qquad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes I_2, \tag{7}$$

где I_2 — единичная матрица 2×2, найдем матрицу ρ_A размера 2×2
$$\rho_A = \begin{pmatrix} \psi_0\psi_0^* + \psi_2\psi_2^* & \psi_0\psi_1^* + \psi_2\psi_3^* \\ \psi_1\psi_0^* + \psi_3\psi_2^* & \psi_1\psi_1^* + \psi_3\psi_3^* \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Определитель матрицы (8) равен
$$\det\rho_A = (\psi_0\psi_0^* + \psi_2\psi_2^*)(\psi_1\psi_1^* + \psi_3\psi_3^*) - (\psi_1\psi_0^* + \psi_3\psi_2^*)(\psi_0\psi_1^* + \psi_2\psi_3^*). \tag{9}$$

Раскрывая скобки, получим
$$\det\rho_A = \psi_0\psi_0^*\psi_3\psi_3^* + \psi_1\psi_1^*\psi_2\psi_2^* - \psi_0\psi_1^*\psi_2^*\psi_3 - \psi_0^*\psi_1\psi_2\psi_3^*. \tag{10}$$

Подставим (6) в (10):

$$\begin{aligned}\det\rho_A \;=\; &\cos^2\theta_0\sin^2\theta_0\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2+\sin^4\theta_0\cos^2\theta_1\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2\\ &-(e^{i(\phi_0-\phi_1-\phi_2-\phi_3)}+e^{i(-\phi_0+\phi_1+\phi_2-\phi_3)})\\ &\times\sin^3\theta_0\cos\theta_0\sin^2\theta_1\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_2.\end{aligned}$$

С учетом соотношения (2) получим

$$\frac{48}{(2\pi)^4}\cos\theta_0(\sin\theta_0)^5\cos\theta_1(\sin\theta_1)^3\cos\theta_2\sin\theta_2 d\theta_0 d\theta_1 d\theta_2 d\phi_0 d\phi_1 d\phi_2 d\phi_3$$

и

$$\int\limits_{SU(4)} d\mu = 1,$$

т.е. мера Хаара нормирована. Здесь использовался тот факт, что

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin^k(x)\cos(x)dx = \frac{1}{k+1},$$

где $k = 1, 2, \ldots$ и

$$\int\limits_0^{2\pi} d\phi = 2\pi.$$

Интегрируя $\det\rho_A$ (или $\det\rho_B$) по мере Хаара и используя формулы

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin^m(x)\cos^n(x)dx = \frac{m-1}{m+n}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{m-2}(x)\cos^n(x)dx,$$

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin^m(x)\cos^n(x)dx = \frac{n-1}{m+n}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^m(x)\cos^{n-2}(x)dx,$$

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2},$$

получим
$$\langle \tau \rangle = \frac{2}{5}.$$

Таким образом, математическое ожидание запутывания случайно выбранного чистого состояния двух кубитов равно 0.4 (при максимально возможном запутывании, равном единице). Запутанность состояния произведения $|00\rangle$ равна $\tau = 0$.

Задача 4. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, где
$$\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbf{C}^2.$$

(i) Рассмотрим состояние
$$|\psi\rangle := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислить
$$\rho_A := \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_B}(|\psi\rangle\langle\psi|), \qquad \rho_B := \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_A}(|\psi\rangle\langle\psi|)$$
и
$$-\mathrm{tr}(\rho_A \log_2 \rho_A), \qquad -\mathrm{tr}(\rho_B \log_2 \rho_B),$$
где $-\mathrm{tr}(\rho_A \log_2 \rho_A)$ означает *энтропию фон Неймана*.

(ii) Рассмотрим состояние
$$|\psi\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислить
$$\rho_A := \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_B}(|\psi\rangle\langle\psi|) \quad \text{и} \quad -\mathrm{tr}(\rho_A \log_2 \rho_A).$$

(iii) Рассмотрим состояние
$$|\psi\rangle := \frac{1}{2}(U_1 \otimes U_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где U_1 и U_2 — унитарные матрицы, действующие в $\mathbf{C}^2$. Вычислить

$$\rho_A := \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_B}(|\psi\rangle\langle\psi|), \qquad -\mathrm{tr}(\rho_A \log_2 \rho_A).$$

(iv) Рассмотрим состояние

$$|\psi\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(U_1 \otimes U_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

где U_1 и U_2 — унитарные матрицы, действующие в $\mathbf{C}^2$. Вычислить

$$\rho_A := \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_B}(|\psi\rangle\langle\psi|) \quad \text{и} \quad -\mathrm{tr}(\rho_A \log_2 \rho_A).$$

Решение 4. (i) Выберем стандартный базис в $\mathbf{C}^2$ для вычисления следа. Матрица плотности ρ имеет вид

$$\rho \equiv |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}
\rho_A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} |\psi\rangle\langle\psi| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} |\psi\rangle\langle\psi| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} |\psi\rangle\langle\psi| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} |\psi\rangle\langle\psi| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
\rho_B &= \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} |\psi\rangle\langle\psi| \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&\quad + \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} |\psi\rangle\langle\psi| \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} |\psi\rangle\langle\psi| \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
&\quad + \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} |\psi\rangle\langle\psi| \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

В данном случае $\rho_A = \rho_B$. Приведем ρ_A к диагональному виду. Собственные значения равны 0 и 1, и соответствующие им ортонормированные собственные векторы $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$. Таким образом, поскольку $0\log_2 0 = 0$ и $1\log_2 1 = 0$, получим

$$\begin{aligned}
-\operatorname{tr}(\rho_A \log_2 \rho_A) &= -\operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right.\\
&\qquad \left.\times \log_2\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)\right)\\
&= -\operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right.\\
&\qquad \left.\times \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\log_2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)\\
&= -\operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\log_2 0 & 0\\ 0 & 1\log_2 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)\\
&= -\operatorname{tr}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

(ii) Выберем стандартный базис в $\mathbf{C}^2$ для вычисления следа. Матрица плотности равна

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\rho_A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} |\psi\rangle\langle\psi| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} |\psi\rangle\langle\psi| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} |\psi\rangle\langle\psi| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} |\psi\rangle\langle\psi| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Следовательно, учитывая, что $\log_2 \frac{1}{2} = -1$,

$$\begin{aligned}
-\operatorname{tr}(\rho_A \log_2 \rho_A) &= -\operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \log_2 \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= -\operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \log_2 \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \log_2 \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(iii) Для вычисления частичного следа выберем следующий базис:

$$\left\{ U_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Получим

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{4}(U_1 \otimes U_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}(U_1^* \otimes U_2^*)$$
$$= \frac{1}{4}(U_1 \otimes U_2)\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)(U_1^* \otimes U_2^*).$$

Следовательно:

$$\rho_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} U_2^*\right)|\psi\rangle\langle\psi|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes U_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} U_2^*\right)|\psi\rangle\langle\psi|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes U_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}U_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} U_1^* \otimes \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$+ \frac{1}{4}U_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} U_1^* \otimes \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{4}U_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} U_1^* + \frac{1}{4}U_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} U_1^*$$
$$= \frac{1}{2}U_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} U_1^*.$$

Приведем ρ_A к диагональному виду. Собственные значения равны 0 и 1, а соответствующие им ортонормированные собственные векторы $\frac{1}{\sqrt{2}}U_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}U_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$. Получим

$$-\operatorname{tr}(\rho_A \log_2 \rho_A) = -\operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}U_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} U_1^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} U_1^*\right.$$
$$\left. \times \log_2 \left(\frac{1}{2}U_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} U_1^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} U_1^*\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}U_1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}U_1^*\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}U_1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}U_1^*\right.\\
&\qquad\left.\times\ \frac{1}{2}U_1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}U_1^*\log_2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}U_1^*\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}U_1^*\right)\\
&= -\operatorname{tr}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}
$$

Здесь использовался тот факт, что

$$
\log_2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\log_2 0 & 0\\ 0 & 1\log_2 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.
$$

(iv) Для вычисления частичного следа выберем следующий базис:

$$
\left\{U_2\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, U_2\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right\}.
$$

Получим

$$
|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{4}(U_1\otimes U_2)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}(U_1^*\otimes U_2^*)
$$

и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
U_1^*\rho_A U_1 &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\
&\quad+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
\rho_A &= U_1 (U_1^* \rho_A U_1) U_1^* \\
&= U_1 \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) U_1^* \\
&= \frac{1}{2} U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_1^*.
\end{aligned}
$$

Для вычисления следа выберем следующий базис:

$$
\left\{ U_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.
$$

Получим

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{tr}(\rho_A \log_2 \rho_A) &= -\mathrm{tr} \left(\frac{1}{2} U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_1^* \log_2 \frac{1}{2} U_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_1^* \right) \\
&= -\mathrm{tr} \left(\frac{1}{2} U_1 \begin{pmatrix} \log_2 \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \log_2 \frac{1}{2} \end{pmatrix} U_1^* \right) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Здесь использовалось свойство циклической инвариантности следа, $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, и то, что U_1 — унитарная матрица, т. е. $U_1 U_1^* = I_2$.

Задача 5. Пусть $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ два конечномерных гильбертовых пространства на $\mathbf{C}$. Обозначим через $|\psi\rangle$ чистое состояние в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. И введем ортонормированный базис $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ в $\mathbf{C}^2$. *Числом Шмидта* (которое также называется *рангом Шмидта*) состояния $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ на $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ называется наименьшее неотрицательное целое число $\mathrm{Sch}(|\psi\rangle, \mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B)$ такое, что состояние $|\psi\rangle$ можно записать в виде

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi\rangle,\mathcal{H}_A,\mathcal{H}_B)} |\psi_j\rangle_A \otimes |\psi_j\rangle_B,$$

где $|\psi_j\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ и $|\psi_j\rangle_B \in \mathcal{H}_B$.

Обозначим через

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^{\min(d_1,d_2)} \lambda_j |j\rangle_A \otimes |j\rangle_B$$

разложение Шмидта состояния $|\psi\rangle$ на $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, где d_1 и d_2 означают размерности подсистем. Тогда число Шмидта — это число ненулевых λ_j. Величины λ_j^2 являются собственными числами матрицы $\mathrm{tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|)$. Очевидно, число Шмидта сепарабельного состояния равно 1, и число Шмидта запутанного состояния больше 1.

Рассмотрим некоторую булеву функцию $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ и введем величину

$$|\psi_f\rangle := \frac{1}{2} \sum_{a,b\in\{0,1\}} (-1)^{f(a,b)} |a\rangle \otimes |b\rangle. \tag{1}$$

В качестве функции f возьмем возьмем операции И (AND), ИЛИ (OR) и Исключительное ИЛИ (XOR), которые определяются следующим образом:

a	b	AND(a,b)	OR(a,b)	XOR(a,b)
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

.

Найти числа Шмидта $|\psi_{AND}\rangle$, $|\psi_{OR}\rangle$ и $|\psi_{XOR}\rangle$ на $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$.

Решение 5. Из определения (1) получим

$$\begin{aligned}|\psi_{AND}\rangle &= \frac{1}{2}((-1)^{0\cdot 0}|00\rangle + (-1)^{0\cdot 1}|01\rangle + (-1)^{1\cdot 0}|10\rangle + (-1)^{1\cdot 1}|11\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle),\end{aligned}$$

где $\cdot$ означает операцию AND. Аналогичным образом получим соотношения для операций OR и XOR:

$$|\psi_{OR}\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle),$$
$$|\psi_{XOR}\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle).$$

Далее вычислим частичный след $|\psi_{AND}\rangle\langle\psi_{AND}|$. Получим

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_B(|\psi_{AND}\rangle\langle\psi_{AND}|) &= (I_2 \otimes \langle 0|)|\psi_{AND}\rangle\langle\psi_{AND}|(I_2 \otimes |0\rangle)\\ &\quad +(I_2 \otimes \langle 1|)|\psi_{AND}\rangle\langle\psi_{AND}|(I_2 \otimes |1\rangle)\\ &= \frac{1}{4}(2|0\rangle\langle 0| + 2|1\rangle\langle 1|)\\ &= \frac{1}{2}I_2\,.\end{aligned}$$

При вычислении использовалось следующее соотношение:

$$(I_2 \otimes \langle 0|)|ab\rangle\langle cd|(I_2 \otimes |0\rangle) + (I_2 \otimes \langle 1|)|ab\rangle\langle cd|(I_2 \otimes |1\rangle) = \delta_{bd}|a\rangle\langle c|,$$

где δ_{bd} — символ Кронекера, и $|ab\rangle \equiv |a\rangle \otimes |b\rangle$. Аналогично для других операций:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_B(|\psi_{OR}\rangle\langle\psi_{OR}|) &= \frac{1}{2}I_2,\\ \mathrm{tr}_B(|\psi_{XOR}\rangle\langle\psi_{XOR}|) &= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)\\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|).\end{aligned}$$

Очевидно, собственные значения $\mathrm{tr}_B(|\psi_{AND}\rangle\langle\psi_{AND}|)$ и $\mathrm{tr}_B(|\psi_{OR}\rangle\langle\psi_{OR}|)$ равны $\frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\mathrm{Sch}(|\psi_{AND}\rangle, \mathbf{C}^2, \mathbf{C}^2) = 2$$

и

$$\mathrm{Sch}(|\psi_{OR}\rangle, \mathbf{C}^2, \mathbf{C}^2) = 2.$$

Собственные числа $\mathrm{tr}_B(|\psi_{XOR}\rangle\langle\psi_{XOR}|)$ равны 0 и 1. Поэтому

$$\mathrm{Sch}(|\psi_{XOR}\rangle, \mathbf{C}^2, \mathbf{C}^2) = 1.$$

Заметим, что

$$|\psi_{XOR}\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle).$$

Задача 6. Рассмотрим ортонормированный базис $\{|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |n - - 1\rangle\}$ в $\mathbf{C}^n$.

(i) Является ли состояние

$$|\psi\rangle := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} |j\rangle \otimes |j\rangle$$

независимым от выбранного ортонормированного базиса?

(ii) Найти $|\psi\rangle\langle\psi|$.

(iii) Найти

$$P := \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} (|jk\rangle - |kj\rangle)(\langle jk| - \langle kj|),$$

где для краткости использовалось обозначение $|jk\rangle \equiv |j\rangle \otimes |k\rangle$. В чем состоит суть данного оператора?

Решение 6. (i) Рассмотрим ортонормированный базис

$$\{\, |\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle, \ldots, |\phi_{n-1}\rangle \,\}$$

в $\mathbf{C}^n$. Справедливо разложение

$$|j\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \langle j|\phi_k\rangle |\phi_k\rangle.$$

И состояние $|\psi\rangle$ может быть записано как

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} \langle j|\phi_k\rangle |\phi_k\rangle \right) \otimes \left(\sum_{l=0}^{n-1} \langle j|\phi_l\rangle |\phi_l\rangle \right) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \overline{\langle \phi_k|j\rangle} \langle j|\phi_l\rangle |\phi_k\rangle \otimes |\phi_l\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \overline{\langle \phi_k|j\rangle} \langle j|\phi_l\rangle \right) |\phi_k\rangle \otimes |\phi_l\rangle,
\end{aligned}
$$

где

$$\langle j|\phi_k\rangle = \overline{\langle \phi_k|j\rangle}.$$

Заметим, что для суммы

$$\sum_{j=0}^{n-1} \overline{\langle \phi_k|j\rangle} \langle j|\phi_l\rangle$$

нельзя применить *соотношение Парсеваля*. Соотношение Парсеваля могло бы быть применено к сумме вида

$$\sum_{j=0}^{n-1} \overline{\langle \phi_k|j\rangle} \langle \phi_l|j\rangle = \langle \phi_k|\phi_l\rangle = \delta_{kl}.$$

Таким образом, состояние Белла $|\psi\rangle$ зависит от выбранного базиса. Однако если все скалярные произведения $\langle j|\phi_k\rangle$ являются вещественными числами, то $|\psi\rangle$ не зависит от выбранного базиса.

(ii)

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle\langle\psi| &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (|j\rangle \otimes |j\rangle)(\langle k| \otimes \langle k|) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |j\rangle\langle k| \otimes |j\rangle\langle k|\,.
\end{aligned}
$$

(iii) Очевидно, $P^* = P$. Кроме того:

$$\begin{aligned}
P^2 &= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{j\neq k}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{l\neq m}(|jk\rangle-|kj\rangle)(\langle jk|-\langle kj|)(|lm\rangle-|ml\rangle)(\langle lm|-\langle ml|)\\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{j\neq k}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{l\neq m}(|jk\rangle-|kj\rangle)(2\delta_{jl}\delta_{km}-2\delta_{jm}\delta_{lk})(\langle lm|-\langle ml|)\\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{j\neq k}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{l\neq m}(|jk\rangle-|kj\rangle)(\langle jk|-\langle kj|)(|lm\rangle-|ml\rangle)(\langle lm|-\langle ml|)\\
&= P.
\end{aligned}$$

Таким образом, P — это проективная матрица. Она проектирует на пространство, натянутое на

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|jk\rangle - |kj\rangle)\ : j,k\in\{0,1,\ldots,n-1\},\ k>j\right\}.$$

Задача 7. Одним из особенно интересных состояний в квантовом исчислении является *состояние Гринбергера–Хорна–Цайлингера* (ГХЦ-состояние) — Greenberger–Horne–Zeilinger (GHZ states). Это состояние трех кубитов действует в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^8$ и определяется следующим образом:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right].$$

(i) Вычислить *матрицу плотности*

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|.$$

(ii) Пусть $\sigma_0 \equiv I_2$, σ_1, σ_2 и σ_3 — *спиновые матрицы Паули*, где I_2 — единичная матрица размера 2×2. Показать, что матрицу ρ можно записать в виде линейных комбинаций кронекеровых произведений матриц Паули (включая σ_0), т. е.

$$\rho = \frac{1}{2^3}\sum_{j_1=0}^{3}\sum_{j_2=0}^{3}\sum_{j_3=0}^{3} c_{j_1,j_2,j_3}\sigma_{j_1}\otimes\sigma_{j_2}\otimes\sigma_{j_3}.$$

Решение 7. (i) Имеем

$$\langle\psi| = \frac{1}{\sqrt{2}}(10000001).$$

Поэтому

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Учитывая, что

$$I_8 = I_2 \otimes I_2 \otimes I_2,$$

получаем

$$\rho = \frac{1}{8}(I_2 \otimes I_2 \otimes I_2 + I_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 + \sigma_3 \otimes I_2 \otimes \sigma_3 + \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes I_2$$
$$+\sigma_1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_1 - \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_2 - \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 - \sigma_2 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1).$$

Задача 8. Рассмотрим симметричную матрицу A на $\mathbf{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

и *базис Белла*

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Базис Белла является ортонормированным в $\mathbf{R}^4$. Обозначим через $\widetilde{A}$ матрицу A в базисе Белла. Какому условию должны удовлетворять элементы a_{ij}, чтобы матрица A была диагональной в базисе Белла?

Решение 8. Очевидно, что

$$\widetilde{a}_{ij} = \widetilde{a}_{ji},$$

т. е. матрица $\widetilde{A}$ тоже симметрична. С помощью непосредственного вычисления получим

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_{11} &= (\Phi^+)^T A \Phi^+ = \frac{1}{2}(a_{11} + 2a_{14} + a_{44}),\\
\widetilde{a}_{12} &= (\Phi^+)^T A \Phi^- = \frac{1}{2}(a_{11} - a_{44}),\\
\widetilde{a}_{13} &= (\Phi^+)^T A \Psi^+ = \frac{1}{2}(a_{12} + a_{13} + a_{24} + a_{34}),\\
\widetilde{a}_{14} &= (\Phi^+)^T A \Psi^- = \frac{1}{2}(a_{12} - a_{13} + a_{24} - a_{34}),\\
\widetilde{a}_{22} &= (\Phi^-)^T A \Phi^- = \frac{1}{2}(a_{11} - 2a_{14} + a_{44}),\\
\widetilde{a}_{23} &= (\Phi^-)^T A \Psi^+ = \frac{1}{2}(a_{12} + a_{13} - a_{24} - a_{23}),\\
\widetilde{a}_{24} &= (\Phi^-)^T A \Psi^- = \frac{1}{2}(a_{12} - a_{13} - a_{24} + a_{34}),\\
\widetilde{a}_{33} &= (\Psi^+)^T A \Psi^+ = \frac{1}{2}(a_{22} + 2a_{23} + a_{33}),\\
\widetilde{a}_{34} &= (\Psi^+)^T A \Psi^- = \frac{1}{2}(a_{22} - a_{33}),\\
\widetilde{a}_{44} &= (\Psi^-)^T A \Psi^- = \frac{1}{2}(a_{22} - 2a_{23} + a_{33}).
\end{aligned}$$

Для того чтобы матрица $\widetilde{A}$ была диагональной, необходимо выполнение следующих условий:

$$a_{11} - a_{44} = 0, \qquad a_{22} - a_{33} = 0$$

и

$$a_{12} = a_{13} = a_{24} = a_{34} = 0,$$

где элементы a_{14} и a_{23} произвольны. Таким образом, матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{23} & a_{22} & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Рассмотрим некоторое состояние $|\psi\rangle$ в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^n$. И пусть X и Y — две эрмитовы матрицы размера $n \times n$. Определим понятие *корреляции* следующим образом:

$$\langle\psi|XY|\psi\rangle - \langle\psi|X|\psi\rangle\langle\psi|Y|\psi\rangle.$$

Пусть $n = 4$ и

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle).$$

Найти корреляцию.

Решение 9. Из соотношения

$$X|\psi\rangle = |\psi\rangle$$

следует, что $\langle\psi|X|\psi\rangle = 1$. Поэтому

$$\langle\psi|XY|\psi\rangle - \langle\psi|X|\psi\rangle\langle\psi|Y|\psi\rangle = \langle\psi|Y|\psi\rangle - \langle\psi|Y|\psi\rangle = 0.$$

Задача 10. Рассмотрим двухкомпонентную систему кутритов $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbf{C}^3$ с произвольным ортонормированным базисом $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ в $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ соответственно.

(i) Найти *антисимметричное подпространство* $\mathcal{H}_-$ на $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

(ii) Найти произвольное антисимметричное состояние на $\mathcal{H}^{\otimes n}$.

Решение 10. (i) Антисимметричное подпространство $\mathcal{H}_-$ on $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ вводится следующим образом:

$$\mathcal{H}_- := \mathrm{span}_{\mathcal{C}}\{|01\rangle - |10\rangle, |12\rangle - |21\rangle, |20\rangle - |02\rangle\} \subset \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B.$$

(ii) Антисимметричное состояние на $\mathcal{H}^{\otimes n}$ определяется как

$$|\psi\rangle = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = 0}^{2} \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n = 0}^{2} a_{j_1, j_2, \ldots, j_n; k_1, k_2, \ldots, k_n} \times$$
$$\times |j_1, j_2, \ldots, j_n; k_1, k_2, \ldots, k_n\rangle,$$

где

$$a_{j_1,j_2,\ldots,j_n;k_1,k_2,\ldots,k_n} := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{2} b_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \prod_{m=1}^{n} \epsilon_{i_m j_m k_m},$$

а ϵ — *символ Леви–Чивита*, т. е. $\epsilon_{ijk} = 1$ для $(ijk) = (123)$ и всех четных перестановок, -1 для всех нечетных перестановок и 0 во всех иных случаях.

Задача 11. Рассмотрим матрицу плотности (*состояние Вернера*) в $\mathbf{C}^4$.

$$\rho_w := r|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + \frac{1-r}{4}I_4,$$

где $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^T$ — это состояние Белла, а $0 \leqslant r \leqslant 1$.

(i) Найти $\mathrm{tr}(\rho_w)$ и собственные числа ρ_w.

(ii) Определить *согласованность* (*concurrence; запутанность матрицы плотности, использованная на стр. 68, является квадратом модуля от согласованности*)

$$C(\rho_w) = \max\{\,\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4,\, 0\,\},$$

где $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \lambda_4$ — собственные числа ρ_w.

Решение 11. (i) Матрица плотности имеет вид

$$\rho_w = \begin{pmatrix} (1+r)/4 & 0 & 0 & r/2 \\ 0 & (1-r)/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-r)/4 & 0 \\ r/2 & 0 & 0 & (1+r)/4 \end{pmatrix}.$$

След матрицы $\mathrm{tr}(\rho_w) = 1$. Собственные числа матрицы ρ_w равны $(1 + r)/4 + r/2 = (1+3r)/4$ и $(1-r)/4$ кратности 3.

(ii) Из (i) следует, что

$$\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = (1+3r)/4 - 3(1-r)/4 = (3r-1)/2.$$

Согласованность равна

$$C(\rho_w) = \max\{(3r-1)/2, 0\}.$$

Если $r = 0$, то $C(\rho_w) = 0$, и если $r = 1$, то $C(\rho_w) = 1$. При $r = \frac{1}{2}$ согласованность равна $C(\rho_w) = \frac{1}{4}$.

Задача 12. Пусть ρ — матрица плотности на $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2 = \mathbf{C}^4$. Введем величину — *запутанность формирования (entanglement of formation)*:

$$E_f(\rho) := \min_{\{p_k, |\psi_k\rangle\}} \sum_{j=0}^{|\{p_k, |\psi_k\rangle\}|} p_j S(\mathrm{tr}_{\mathbf{C}^2}(|\psi_j\rangle\langle\psi_j|)),$$

где $\{p_k, |\psi_k\rangle\}$ указывает, что минимум необходимо взять по всем возможным реализациям смесей ρ. Здесь $|\{p_k, |\psi_k\rangle\}|$ — это число чистых состояний, составляющих смесь, и

$$S(\sigma) := -\mathrm{tr}(\sigma \log_2 \sigma)$$

— *энтропия фон Неймана*. Минимум ищется среди всех смесей

$$\{\, (p_0, |\psi_0\rangle), (p_1, |\psi_1\rangle), \ldots \},$$

которые реализуют ρ, где мощность множества, очевидно, определяется смесью и является конечной. Величина $E_f(\rho)$ может быть вычислена по формуле

$$E_f(\rho) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C(\rho)^2}}{2}\right),$$

где

$$C(\rho) := \max\left\{\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}, 0\right\}$$

— *согласованность*, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \lambda_4$ — собственные числа следующей матрицы

$$\rho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y),$$

а

$$h(p) := -p \log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$$

— *энтропия Шеннона*. Найти $E_f(\rho)$ для *состояния Вернера*

$$\rho_w := \frac{5}{8}|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + \frac{1}{8}\left(|\phi^-\rangle\langle\phi^-| + |\psi^+\rangle\langle\psi^+| + |\psi^-\rangle\langle\psi^-|\right) = \frac{1}{2}|\phi^+\rangle\langle\phi^+| + \frac{1}{8}I_4,$$

где $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)^T$ — состояние Белла.

Решение 12. Матрица плотности имеет вид

$$\rho_w = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\widetilde{\rho}_w := (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho_w^*(\sigma_y \otimes \sigma_y) = \rho_w,$$

где

$$\sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\rho_w(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho_w^*(\sigma_y \otimes \sigma_y) = \rho_w^2 = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы равны $\frac{25}{64}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{64}$ и $\frac{1}{64}$. Согласованность равна

$$C(\rho) = \max\left\{\frac{5}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8}, 0\right\} = \frac{1}{4}.$$

Полученный результат согласуется с решением 11, где $r = \frac{1}{2}$. Таким образом, $E_f(\rho) = 0.1176$.

Задача 13. Пусть $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ — два конечномерных гильбертовых пространства. Рассмотрим гамильтониан

$$\widehat{H} = X_A \otimes X_B,$$

где линейный оператор $X_A = X_A^{-1}$ действует на $\mathcal{H}_A$, и линейный оператор $X_B = X_B^{-1}$ — на $\mathcal{H}_B$. Кроме того, $\widehat{H} = \widehat{H}^{-1}$. Пусть $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. *Энтропия фон Неймана* определяется с помощью соотношения

$$E(|\psi\rangle) := -\mathrm{tr}_A(\rho_A \log_2 \rho_A),$$

где $\rho_A = \mathrm{tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|)$. Введем величину — *способность к запутыванию (entanglement capability)* $\widehat{H}$ с помощью соотношения

$$E(\widehat{H}) := \max_{|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B} \Gamma(t)|_{t\to 0},$$

где

$$\Gamma(t) := \frac{dE(\exp(-i\widehat{H}t)|\psi(0)\rangle)}{dt}$$

— *скорость запутывания состояния (state entanglement rate)*.

(i) Показать, что

$$\Gamma(t) = i\mathrm{tr}_A\left(\mathrm{tr}_B([\widehat{H}, |\psi\rangle\langle\psi|] \log_2 \rho_A,\right),$$

где символ $[,]$ означает коммутатор.

(ii) Показать, что верхняя граница $\Gamma(t)|_{t\to 0}$ задается неравенством

$$\Gamma(t)|_{t\to 0} \leqslant 1.9123.$$

Решение 13. Пусть $\rho_{AB}(t) := |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ и $\rho_A(t) := \mathrm{tr}_B(\rho_{AB}(t))$. Имеем

$$\rho_{AB}(t) = \exp(-i\widehat{H}t)\rho_{AB}(0)\exp(i\widehat{H}t)$$

и изменение $\rho_{AB}(t)$ с течением времени (*уравнение фон Неймана*) определяется соотношением

$$i\frac{d\rho_{AB}(t)}{dt} = [\widehat{H}, \rho_{AB}(t)].$$

Таким образом,

$$i\frac{d\rho_A(t)}{dt} = \mathrm{tr}_B[\widehat{H}, \rho_{AB}(t)].$$

Определим скорость запутывания:

$$\begin{aligned}
\Gamma(t) &= -\frac{d}{dt}\mathrm{tr}_\mathrm{A}(\rho_A \log_2 \rho_A) = -\mathrm{tr}_\mathrm{A}(\frac{d}{dt}\rho_A \log_2 \rho_A) \\
&= -\mathrm{tr}_\mathrm{A}(\frac{d\rho_A}{dt}\log_2 \rho_A + \rho_A \frac{d}{dt}\log_2 \rho_A) = -\mathrm{tr}_\mathrm{A}(\frac{d\rho_A}{dt}\log_2 \rho_A) \\
&= i\mathrm{tr}_\mathrm{A}(\mathrm{tr}_B[\widehat{H}, \rho_{AB}]\log_2 \rho_A),
\end{aligned}$$

поскольку

$$\mathrm{tr}_A(\rho_A \frac{d}{dt} \log_2 \rho_A) = 0.$$

Пусть

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{j=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sqrt{\lambda_j} |\phi_j\rangle \otimes |\eta_j\rangle$$

— разложение Шмидта $|\psi(0)\rangle$, заданное на $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, где $\lambda_j > 0$ и

$$\sum_{j=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \lambda_j = 1,$$

а

$$\{\, |\phi_1\rangle, \ldots, |\phi_{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)}\rangle \,\}, \qquad \{\, |\eta_1\rangle, \ldots, |\eta_{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)}\rangle \,\}$$

— ортонормированные наборы состояний. Обозначим через $\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)$ ранг Шмидта состояния $|\psi(0)\rangle$ на $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_B\left([\widehat{H}, \rho_{AB}(0)]\right) &= \sum_{j=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} I \otimes \langle \eta_j| \left[\widehat{H}, \rho_{AB}(0)\right] I \otimes |\eta_j\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} I \otimes \langle \eta_j| \left[X_A \otimes X_B, \rho_{AB}(0)\right] I \otimes |\eta_j\rangle \\
&= \sum_{m=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sum_{n=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sqrt{\lambda_m \lambda_n} \langle \eta_n|X_B|\eta_m\rangle X_A |\phi_m\rangle\langle\phi_n| \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sum_{n=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sqrt{\lambda_m \lambda_n} |\phi_m\rangle\langle\phi_n| X_A \langle \eta_n|X_B|\eta_m\rangle \\
&= \sum_{m=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sum_{n=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sqrt{\lambda_m \lambda_n} \langle \eta_n|X_B|\eta_m\rangle [X_A, |\phi_m\rangle\langle\phi_n|].
\end{aligned}$$

При выводе использовался тот факт, что

$$\rho_{AB}(0) = \sum_{m=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sum_{n=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sqrt{\lambda_m \lambda_n} (|\phi_m\rangle \otimes |\eta_m\rangle)(\langle\phi_n| \otimes \langle\eta_n|).$$

Поскольку

$$\rho_A(0) = \sum_{j=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \quad \text{и} \quad \log_2 \rho_A(0) = \sum_{j=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \log_2 \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|,$$

оценка сверху имеет вид

$$\begin{aligned}
\Gamma(t)|_{t\to 0} &= i\mathrm{tr}_{\mathrm{A}}(\mathrm{tr}_B[\widehat{H}, \rho_{AB}(0)] \log_2 \rho_A(0)) \\
&= i \sum_{j=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \langle\phi_j|\mathrm{tr}_B[\widehat{H}, \rho_{AB}(0)] \log_2 \rho_A(0)|\phi_j\rangle \\
&= i \sum_{m=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sum_{n=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sqrt{\lambda_m\lambda_n} \log_2 \lambda_n \langle\eta_n|X_B|\eta_m\rangle\langle\phi_n|X_A|\phi_m\rangle \\
&\quad -i \sum_{m=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sum_{n=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sqrt{\lambda_m\lambda_n} \log_2 \lambda_m \langle\eta_n|X_B|\eta_m\rangle\langle\phi_n|X_A|\phi_m\rangle \\
&= i \sum_{m=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sum_{n=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sqrt{\lambda_m\lambda_n} \log_2 \frac{\lambda_n}{\lambda_m} \langle\eta_n|X_B|\eta_m\rangle\langle\phi_n|X_A|\phi_m\rangle \\
&\leqslant \sum_{m=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sum_{n=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sqrt{\lambda_m\lambda_n} \left|\log_2 \frac{\lambda_n}{\lambda_m}\right| |\langle\eta_n|X_B|\eta_m\rangle||\langle\phi_n|X_A|\phi_m\rangle| \\
&= \sum_{m=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sum_{n=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} (\lambda_m + \lambda_n)|\langle\eta_n|X_B|\eta_m\rangle||\langle\phi_n|X_A|\phi_m\rangle| \\
&\quad \times \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_m + \lambda_n}\frac{\lambda_m}{\lambda_m + \lambda_n}} \left|\log_2 \frac{\lambda_n}{\lambda_m}\right| \\
&\leqslant \sum_{m=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sum_{n=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} (\lambda_m + \lambda_n)|\langle\eta_n|X_B|\eta_m\rangle||\langle\phi_n|X_A|\phi_m\rangle| \\
&\quad \times \max_{x\in(0,1)} \sqrt{x(1-x)} \log_2 \left(\frac{x}{1-x}\right) \\
&\leqslant 2 \max_{x\in(0,1)} \sqrt{x(1-x)} \log_2 \left(\frac{x}{1-x}\right) \approx 1.9123.
\end{aligned}$$

При выводе соотношения использовалась следующая цепочка неравенств

$$\sum_{m=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sum_{n=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \lambda_m |\langle \eta_n | X_B | \eta_m \rangle| |\langle \phi_n | X_A | \phi_m \rangle|$$
$$\leqslant \sum_{m=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} \sum_{n=1}^{\mathrm{Sch}(|\psi(0)\rangle)} |\langle \eta_n | X_B | \eta_m \rangle| |\langle \phi_n | X_A | \phi_m \rangle| \leqslant 1,$$

так как $X_A^2 = I$ и $X_B^2 = I$.

Задача 14. Рассмотрим гамильтониан

$$\widehat{H} = \mu_x \sigma_x \otimes \sigma_x + \mu_y \sigma_y \otimes \sigma_y, \qquad \mu_x, \mu_y \in \mathbf{R},$$

где σ_x и σ_y — спиновые матрицы Паули.

(i) Вычислить собственные числа и векторы матрицы $\widehat{H}$.

(ii) Являются ли собственные векторы запутанными?

(iii) Рассмотрим $|\psi\rangle \in \mathbf{C}^4$. *Энтропия фон Неймана* определяется с помощью соотношения

$$E(|\psi\rangle) := -\mathrm{tr}(\rho_A \log_2 \rho_A),$$

где $\rho_A := \mathrm{tr}_{\mathbf{C}^2}(|\psi\rangle\langle\psi|)$. *Способность к запутыванию* гамильтониана $\widehat{H}$ равна

$$E(\widehat{H}) := \max_{|\psi\rangle \in \mathbf{C}^4} \Gamma(t)|_{t\to 0},$$

где

$$\Gamma(t) = \frac{dE(\exp(-i\widehat{H}t)|\psi(0)\rangle)}{dt}$$

— *скорость запутывания состояния*. Показать, что

$$E(\widehat{H}) = \alpha(\mu_x + \mu_y),$$

где

$$\alpha = 2 \max_{x \in (0,1)} \sqrt{x(1-x)} \log_2 \left(\frac{x}{1-x} \right).$$

Решение 14. (i) Гамильтониан имеет вид

$$\widehat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_x - \mu_y \\ 0 & 0 & \mu_x + \mu_y & 0 \\ 0 & \mu_x + \mu_y & 0 & 0 \\ \mu_x - \mu_y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перечислим его собственные числа и векторы: $\mu_x - \mu_y$ и собственный вектор

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)^T,$$

$\mu_y - \mu_x$ и вектор

$$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)^T,$$

$\mu_x + \mu_y$ и вектор

$$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0)^T,$$

$-\mu_x - \mu_y$ и вектор

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)^T.$$

(ii) Очевидно, все четыре собственных вектора являются запутанными (базис Белла).

(iii) Рассмотрим

$$\begin{aligned} |\psi_{max}\rangle &:= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{x_0} \\ -i\sqrt{1-x_0} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (\sqrt{x_0} - i\sqrt{1-x_0})\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\sqrt{x_0} + i\sqrt{1-x_0})\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $x_0 \in (0, 1)$ удовлетворяет соотношению

$$\alpha = 2\sqrt{x_0(1-x_0)}\log_2\left(\frac{x_0}{1-x_0}\right).$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
&\exp(-i\widehat{H}t)|\psi_{max}\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-it)^j}{j!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_x - \mu_y \\ 0 & 0 & \mu_x + \mu_y & 0 \\ 0 & \mu_x + \mu_y & 0 & 0 \\ \mu_x - \mu_y & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^j |\psi_{max}\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-it)^{2j}(\mu_x + \mu_y)^{2j}}{(2j)!} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{x_0} \\ -i\sqrt{1-x_0} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-it)^{2j+1}(\mu_x + \mu_y)^{2j+1}}{(2j+1)!} \begin{pmatrix} 0 \\ -i\sqrt{1-x_0} \\ \sqrt{x_0} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{x_0}\cos(t(\mu_x + \mu_y)) - \sqrt{1-x_0}\sin(t(\mu_x + \mu_y)) \\ -i\left(\sqrt{x_0}\sin(t(\mu_x + \mu_y)) + \sqrt{1-x_0}\cos(t(\mu_x + \mu_y))\right) \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
a_1 &:= \sqrt{x_0}\cos(t(\mu_x + \mu_y)) - \sqrt{1-x_0}\sin(t(\mu_x + \mu_y)), \\
a_2 &:= \sqrt{x_0}\sin(t(\mu_x + \mu_y)) + \sqrt{1-x_0}\cos(t(\mu_x + \mu_y))
\end{aligned}
$$

и

$$
\rho_{max}(t) := \exp(-i\widehat{H}t)|\psi_{max}\rangle\langle\psi_{max}|\exp(i\widehat{H}t),
$$

тогда матрица $\rho_{max}(t)$ и ее след имеют вид

$$
\rho_{max}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^2 & ia_1\overline{a}_2 & 0 \\ 0 & -ia_2\overline{a}_1 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\mathrm{tr}_{\mathbf{C}^2}(\rho_{max}(t)) = \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix}.
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
\Gamma(t) &= -\frac{d}{dt}\left(a_1^2\log_2 a_1^2 + a_2^2\log_2 a_2^2\right)\\
&= -\left(4a_1\frac{da_1}{dt}\log_2 a_1 + \frac{2}{\ln 2}a_1\frac{da_1}{dt} + 4a_2\frac{da_2}{dt}\log_2 a_2 + \frac{2}{\ln 2}a_2\frac{da_2}{dt}\right)\\
&= 4\mu a_1 a_2\left(\log_2\frac{a_1}{a_2}\right)\\
&= 4\mu\left(\sqrt{x_0(1-x_0)}\cos(2t\mu) + \frac{1}{2}(2x_0-1)\sin(2t\mu)\right)\\
&\quad\times\log_2\left(\frac{\sqrt{x_0}\cos(2t\mu) - \sqrt{1-x_0}\sin(2t\mu)}{\sqrt{x_0}\sin(2t\mu) + \sqrt{1-x_0}\cos(2t\mu)}\right),
\end{aligned}
$$

где $\mu \equiv \mu_x + \mu_y$, и a_1 и a_2 удовлетворяют линейным дифференциальным уравнениям

$$
\frac{da_1}{dt} = -a_2, \qquad \frac{da_2}{dt} = a_1.
$$

Поскольку $\widehat{H}$ асимптотически эквивалентно $(\mu_x + \mu_y)\sigma_x \otimes \sigma_x$ и

$$
E((\mu_x + \mu_y)\sigma_x \otimes \sigma_x) \leqslant (\mu_x + \mu_y)\alpha,
$$

то с учетом равенства

$$
\Gamma(0) = (\mu_x + \mu_y)2\sqrt{x_0(1-x_0)}\log_2\frac{x_0}{1-x_0} = \alpha(\mu_x + \mu_y)
$$

получим $E(\widehat{H}) = \alpha(\mu_x + \mu_y)$.

Задача 15. Рассмотрим ортогональный базис $\{|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |n-1\rangle\}$ в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^n$. Далее будем предполагать, что это стандартный базис. Рассмотрим следующие состояния (*когерентные состояния*):

$$
|\beta\rangle = \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k\right)^{1/2}|0\rangle + \sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{x_k}e^{i\phi_k}|k\rangle,
$$

где $\phi_k \in [0, 2\pi)$, $0 \leqslant x_k \leqslant 1$ и наложены следующие ограничения:

$$
0 \leqslant x_j \leqslant 1 - \sum_{k=j+1}^{n-1} x_k, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-2.
$$

Кроме того, задана мера Лебега

$$d\mu(\beta) = \frac{n!}{(2\pi)^{n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} dx_j d\phi_j.$$

(i) Пусть $n = 4$. В этом случае состояние $|\beta\rangle$ запишется в виде

$$|\beta\rangle = \begin{pmatrix} (1 - x_1 - x_2 - x_3)^{1/2} \\ \sqrt{x_1}e^{i\phi_1} \\ \sqrt{x_2}e^{i\phi_2} \\ \sqrt{x_3}e^{i\phi_3} \end{pmatrix}.$$

Показать, что это состояние нормированное.

(ii) Вычислить

$$\rho = |\beta\rangle\langle\beta|.$$

(iii) Показать, что когерентные состояния $|\beta\rangle$ удовлетворяют соотношению

$$\int_\Omega d\mu(\beta)|\beta\rangle\langle\beta| = I_4,$$

где $d\mu(\beta)$ — равномерная мера, определенная выше, и Ω — область определения для описанных выше ϕ_j $(j = 1, 2, 3)$ и x_k $(k = 1, 2, 3)$. Матрица I_4 — единичная матрица размера 4×4. Это уравнение называется *разложением единицы (resolution of identity)*, и когерентное состояние должно удовлетворять этому уравнению.

(iv) Найти приведенную матрицу плотности с помощью $|\beta\rangle$ и условия для запутывания.

Решение 15. (i) Взяв скалярное произведение, получим

$$((1-x_1-x_2-x_3)^{1/2}\sqrt{x_1}e^{-i\phi_1}\sqrt{x_2}e^{-i\phi_2}\sqrt{x_3}e^{-i\phi_3}) \begin{pmatrix} (1 - x_1 - x_2 - x_3)^{1/2} \\ \sqrt{x_1}e^{i\phi_1} \\ \sqrt{x_2}e^{i\phi_2} \\ \sqrt{x_3}e^{i\phi_3} \end{pmatrix}$$

$$= (1 - x_1 - x_2 - x_3) + x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Данное состояние является нормированным.

(ii) Вычислим искомую матрицу размера 4×4

$$\rho = |\beta\rangle\langle\beta|$$

$$= \begin{pmatrix} d^2 & d\sqrt{x_1}e^{-i\phi_1} & d\sqrt{x_2}e^{-i\phi_2} & d\sqrt{x_3}e^{-i\phi_3} \\ d\sqrt{x_1}e^{i\phi_1} & x_1 & \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}e^{i(\phi_1-\phi_2)} & \sqrt{x_1}\sqrt{x_3}e^{i(\phi_1-\phi_3)} \\ d\sqrt{x_2}e^{i\phi_2} & \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}e^{i(\phi_2-\phi_1)} & x_2 & \sqrt{x_2}\sqrt{x_3}e^{i(\phi_2-\phi_3)} \\ d\sqrt{x_3}e^{i\phi_3} & \sqrt{x_3}\sqrt{x_1}e^{i(\phi_3-\phi_1)} & \sqrt{x_3}\sqrt{x_2}e^{i(\phi_3-\phi_2)} & x_3 \end{pmatrix},$$

где $d := (1 - x_1 - x_2 - x_3)^{1/2}$.

(iii) Поскольку

$$\int\limits_{\phi=0}^{2\pi} e^{i\phi} = 0$$

и

$$\int\limits_{\phi_3=0}^{2\pi} \int\limits_{\phi_2=0}^{2\pi} \int\limits_{\phi_1=0}^{2\pi} d\phi_3 d\phi_2 d\phi_1 = (2\pi)^3,$$

$$\int\limits_{x_3=0}^{1} \int\limits_{x_2=0}^{1-x_3} \int\limits_{x_1=0}^{1-x_2-x_3} dx_3 dx_2 dx_1 = \frac{1}{6},$$

$$\int\limits_{x_3=0}^{1} \int\limits_{x_2=0}^{1-x_3} \int\limits_{x_1=0}^{1-x_2-x_3} dx_3 dx_2 dx_1 x_1 = \frac{1}{24},$$

$$\int\limits_{x_3=0}^{1} \int\limits_{x_2=0}^{1-x_3} \int\limits_{x_1=0}^{1-x_2-x_3} dx_3 dx_2 dx_1 x_2 = \frac{1}{24},$$

$$\int\limits_{x_3=0}^{1} \int\limits_{x_2=0}^{1-x_3} \int\limits_{x_1=0}^{1-x_2-x_3} dx_3 dx_2 dx_1 x_3 = \frac{1}{24},$$

получим единичную матрицу размера 4×4.

(iv) Пусть $|0\rangle_4$, $|1\rangle_4$, $|2\rangle_4$, $|3\rangle_4$ — стандартный базис в пространстве $\mathbf{C}^4$, и $|0\rangle_2$, $|1\rangle_2$ — стандартный базис в пространстве $\mathbf{C}^2$. Тогда можно выразить $|0\rangle_4 = |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_2$, $|1\rangle_4 = |0\rangle_2 \otimes |1\rangle_2$, $|2\rangle_4 = |1\rangle_2 \otimes |0\rangle_2$ и $|3\rangle_4 = |1\rangle_2 \otimes |1\rangle_2$ с коэффициентами

$$c_{00} = (1 - x_1 - x_2 - x_3)^{1/2}, \quad c_{01} = \sqrt{x_1}e^{i\phi_1},$$
$$c_{10} = \sqrt{x_2}e^{i\phi_2}, \quad c_{11} = \sqrt{x_3}e^{i\phi_3}.$$

Получим матрицу размера 2×2

$$C = \begin{pmatrix} (1 - x_1 - x_2 - x_3)^{1/2} & \sqrt{x_1}e^{i\phi_1} \\ \sqrt{x_2}e^{i\phi_2} & \sqrt{x_3}e^{i\phi_3} \end{pmatrix}.$$

Приведенная матрица плотности равна

$$CC^\dagger = \begin{pmatrix} 1 - x_2 - x_3 & d\sqrt{x_2}e^{-i\phi_2} + \sqrt{x_1}\sqrt{x_3}e^{i\phi_1}e^{-i\phi_3} \\ d\sqrt{x_2}e^{i\phi_2} + \sqrt{x_1}\sqrt{x_3}e^{-i\phi_1}e^{i\phi_3} & x_2 + x_3 \end{pmatrix},$$

где $d := (1 - x_1 - x_2 - x_3)^{1/2}$. Определитель матрицы равен

$$\det(CC^\dagger) = x_3 d^2 + x_1 x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2 x_3}\, d\cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3).$$

Состояние $|\beta\rangle$ не является запутанным, если

$$\det(C^\dagger C) = 0.$$

Задача 16. Пусть $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ — конечномерные гильбертовы пространства. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}$, являющееся тензорным произведением этих пространств $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Пусть $|\psi\rangle$ — нормированный вектор (чистое состояние) из пространства $\mathcal{H}$, и X — наблюдаемая (описываемая эрмитовой матрицей $\widehat{X}$) из $\mathcal{H}$. В этом случае величина $\langle\psi|\widehat{X}|\psi\rangle$ описывает математические ожидания. Следующие три условия эквивалентны при применении к чистым состояниям.

1. *Разложимость (Factorisability)*: $|\psi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$, где $|\alpha\rangle \in \mathcal{H}_A$ и $|\beta\rangle \in \mathcal{H}_B$, с учетом того, что $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ нормированные.

2. Обобщенное *неравенство Белла*. Пусть $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$ — эрмитовы операторы (матрицы) в пространстве $\mathcal{H}_A$ такие, что

$$\widehat{A}_1^2 = I_A, \qquad \widehat{A}_2^2 = I_A,$$

где I_A — тождественный оператор из пространства $\mathcal{H}_A$. Рассмотрим также эрмитовы операторы (матрицы) $\widehat{B}_1$, $\widehat{B}_2$ из пространства $\mathcal{H}_B$ такие, что

$$\widehat{B}_1^2 = I_B, \qquad \widehat{B}_2^2 = I_B,$$

где I_B — тождественный оператор из пространства $\mathcal{H}_B$. Очевидно, что собственные числа $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$, $\widehat{B}_1$ и $\widehat{B}_2$ могут быть равны только ± 1. Обобщенное неравенство Белла имеет вид

$$|\langle\psi|\widehat{A}_1 \otimes \widehat{B}_1|\psi\rangle + \langle\psi|\widehat{A}_1 \otimes \widehat{B}_2|\psi\rangle + \langle\psi|\widehat{A}_2 \otimes \widehat{B}_1|\psi\rangle - \langle\psi|\widehat{A}_2 \otimes \widehat{B}_2|\psi\rangle| \leqslant 2.$$

3. *Статистическая независимость*. Все эрмитовы операторы $\widehat{A}$, определенные на пространстве $\mathcal{H}_A$, и операторы $\widehat{B}$ на пространстве $\mathcal{H}_B$, с учетом условий, данных выше, удовлетворяют соотношению

$$\langle\psi|\widehat{A} \otimes \widehat{B}|\psi\rangle = \langle\psi|\widehat{A} \otimes I_B|\psi\rangle\langle\psi|I_A \otimes \widehat{B}|\psi\rangle.$$

(i) Показать, что условие 3 следует из условия 1.
(ii) Показать, что условие 2 следует из условия 3.

Решение 16. (i) Предположим, что

$$|\psi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle.$$

В этом случае

$$\begin{aligned}\langle\psi|(\widehat{A} \otimes \widehat{B})|\psi\rangle &= (\langle\beta| \otimes \langle\alpha|)(\widehat{A} \otimes \widehat{B})(|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle) \\ &= \langle\alpha|\widehat{A}|\alpha\rangle\langle\beta|\widehat{B}|\beta\rangle.\end{aligned}$$

(ii) Обозначим для краткости

$$\langle\widehat{A}_1 \otimes \widehat{B}_1\rangle = \langle\psi|\widehat{A}_1 \otimes \widehat{B}_1|\psi\rangle$$

и т.д. Используя статистическую независимость, получим

$$|\langle\widehat{A}_1 \otimes \widehat{B}_1\rangle + \langle\widehat{A}_1 \otimes \widehat{B}_2\rangle + \langle\widehat{A}_2 \otimes \widehat{B}_1\rangle - \langle\widehat{A}_2 \otimes \widehat{B}_2\rangle|$$

$$= |\langle\widehat{A}_1 \otimes I_B\rangle(\langle\widehat{I}_A \otimes \widehat{B}_1\rangle + \langle\widehat{I}_A \otimes \widehat{B}_2\rangle) + \langle\widehat{A}_2 \otimes I_B\rangle(\langle I_A \otimes \widehat{B}_1\rangle - \langle I_A \otimes \widehat{B}_2\rangle)|.$$

С учетом неравенств $|\langle \widehat{A}_1 \otimes I_B \rangle| \leqslant 1$ и $|\langle \widehat{A}_2 \otimes I_B \rangle| \leqslant 1$ получим

$$\begin{aligned}
&|\langle \widehat{A}_1 \otimes \widehat{B}_1 \rangle + \langle \widehat{A}_1 \otimes \widehat{B}_2 \rangle + \langle \widehat{A}_2 \otimes \widehat{B}_1 \rangle - \langle \widehat{A}_2 \otimes \widehat{B}_2 \rangle| \\
\leqslant\ & |\langle I_A \otimes \widehat{B}_1 \rangle + \langle I_A \otimes \widehat{B}_2 \rangle| + |\langle I_A \otimes \widehat{B}_1 \rangle - \langle I_A \otimes \widehat{B}_2 \rangle| \\
\leqslant\ & \max((\langle I_A \otimes \widehat{B}_1 \rangle + \langle I_A \otimes \widehat{B}_2 \rangle) + (\langle I_A \otimes \widehat{B}_1 \rangle - (\langle I_A \otimes \widehat{B}_2 \rangle), \\
& (\langle I_A \otimes \widehat{B}_1 \rangle + \langle I_A \otimes \widehat{B}_2 \rangle) - (\langle I_A \otimes \widehat{B}_1 \rangle - \langle I_A \otimes \widehat{B}_2 \rangle), \\
& -(\langle \widehat{I}_A \otimes \widehat{B}_1 \rangle + \langle I_A \otimes \widehat{B}_1 \rangle) + (\langle I_A \otimes \widehat{B}_1 \rangle - \langle I_A \otimes \widehat{B}_2 \rangle), \\
& -(\langle I_A \otimes \widehat{B}_1 \rangle + \langle I_A \otimes \widehat{B}_2 \rangle) - (\langle I_A \otimes \widehat{B}_1 \rangle - \langle I_A \otimes \widehat{B}_1 \rangle)) \\
=\ & \max(2\langle I_A \otimes \widehat{B}_1 \rangle, 2\langle I_A \otimes \widehat{B}_2 \rangle, -2\langle I_A \otimes \widehat{B}_2 \rangle, -2\langle I_A \otimes \widehat{B}_1 \rangle) \leqslant 2.
\end{aligned}$$

При выводе также использовались неравенства

$$|\langle I_A \otimes \widehat{B}_1 \rangle| \leqslant 1, \qquad |\langle I_A \otimes \widehat{B}_2 \rangle| \leqslant 1.$$

Задача 17. Пусть $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ — конечномерные гильбертовы пространства. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}$, являющееся тензорным произведением этих пространств: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

Пусть $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$ — эрмитовы операторы (матрицы) в пространстве $\mathcal{H}_A$ такие, что

$$\widehat{A}_1^2 = I_A, \qquad \widehat{A}_2^2 = I_A.$$

Рассмотрим также эрмитовы операторы (матрицы) $\widehat{B}_1$, $\widehat{B}_2$ из пространства $\mathcal{H}_B$ такие, что

$$\widehat{B}_1^2 = I_B, \qquad \widehat{B}_2^2 = I_B.$$

Обобщенное *неравенство Белла* имеет вид

$$|\langle \psi | \widehat{A}_1 \otimes \widehat{B}_1 | \psi \rangle + \langle \psi | \widehat{A}_1 \otimes \widehat{B}_2 | \psi \rangle + \langle \psi | \widehat{A}_2 \otimes \widehat{B}_1 | \psi \rangle - \langle \psi | \widehat{A}_2 \otimes \widehat{B}_2 | \psi \rangle| \leqslant 2.$$

Пусть $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbf{C}^2$, и $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ будет стандартным базисом в пространстве $\mathbf{C}^2$. Рассмотрим запутанное состояние в пространстве $\mathcal{H} = \mathbf{C}^4$ (*ЭПР-состояние*)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle).$$

Показать, что это состояние и операторы

$$\widehat{A}_1 := \sigma_x, \quad \widehat{A}_2 := \sigma_y, \quad \widehat{B}_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_y), \quad \widehat{B}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x - \sigma_y)$$

нарушают неравенство Белла.

Решение 17. Запишем результаты действия операторов на состояния:

$$\widehat{A}_1|0\rangle = |1\rangle, \qquad \widehat{A}_1|1\rangle = |0\rangle,$$

$$\widehat{A}_2|0\rangle = i|1\rangle, \qquad \widehat{A}_2|1\rangle = -i|0\rangle,$$

$$\widehat{B}_1|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|1\rangle), \qquad \widehat{B}_1|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|0\rangle),$$

$$\widehat{B}_2|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - i|1\rangle), \qquad \widehat{B}_2|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|0\rangle).$$

С учетом того что $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$ и $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$, получим

$$|\langle\psi|\widehat{A}_1 \otimes \widehat{B}_1|\psi\rangle + \langle\psi|\widehat{A}_1 \otimes \widehat{B}_2|\psi\rangle + \langle\psi|\widehat{A}_2 \otimes \widehat{B}_1|\psi\rangle - \langle\psi|\widehat{A}_2 \otimes \widehat{B}_2|\psi\rangle| = 2\sqrt{2}.$$

Очевидно, что неравенство Белла нарушено: $2\sqrt{2} > 2$.

Задача 18. Рассмотрим чистое состояние

$$|\psi\rangle := \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$$

в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ и $|\alpha|^2 + |\beta^2| = 1$. Пусть $\rho := |\psi\rangle\langle\psi|$ — соответствующая матрица плотности.

(i) Найти $-\mathrm{tr}\rho_1 \log_2 \rho_1$, где $\rho_1 := \mathrm{tr}_{\mathbf{C}^2}\rho$.

(ii) Пусть $\widetilde{\rho}$ — матрица плотности незапутанного состояния на $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$. Найти *точность воспроизведения (fidelity)* (также называемую *вероятностью перехода Ульмана (Uhlmann)*)

$$\mathcal{F}(\rho, \widetilde{\rho}) := \left[\mathrm{tr}\sqrt{\sqrt{\rho}\widetilde{\rho}\sqrt{\rho}}\right]^2.$$

(iii) Показать, что минимум по $\widetilde{\rho}$ *модифицированной метрики Буре (Bures)*

$$D_B(\rho, \widetilde{\rho}) := 2 - 2\mathcal{F}(\rho, \widetilde{\rho})$$

равен $4|\alpha|^2(1 - |\alpha|^2)$ при

$$\sigma := |\alpha|^2|00\rangle\langle 00| + |\beta|^2|11\rangle\langle 11|.$$

Метрика Буре определяется следующим образом:

$$D_{Bures}(\rho, \widetilde{\rho}) := 2 - 2\sqrt{\mathcal{F}(\rho, \widetilde{\rho})}.$$

(iv) Сравнить результат пункта (iii) с результатом (i).

Решение 18. (i) Матрица плотности равна

$$\rho = |\alpha|^2|00\rangle\langle 00| + |\beta|^2|11\rangle\langle 11| + \alpha\overline{\beta}|00\rangle\langle 11| + \beta\overline{\alpha}|11\rangle\langle 00|.$$

Найдя частичный след по состояниям первого кубита в $\mathbf{C}^2$, получим

$$\rho_1 = \mathrm{tr}_{\mathbf{C}^2}\rho = |\alpha|^2|0\rangle\langle 0| + |\beta|^2|1\rangle\langle 1|.$$

Итак,

$$-\mathrm{tr}\rho_1 \log_2 \rho_1 = -|\alpha|^2 \log_2 |\alpha|^2 - (1-|\alpha|^2)\log_2(1-|\alpha|^2).$$

(ii) Поскольку ρ — это чистое состояние, то $\sqrt{\rho} = \rho$ и

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\rho,\widetilde{\rho}) &= \left[\mathrm{tr}\sqrt{\sqrt{\rho}\widetilde{\rho}\sqrt{\rho}}\right]^2 \\
&= \left[\mathrm{tr}\sqrt{\rho\widetilde{\rho}\rho}\right]^2 \\
&= \left[\mathrm{tr}\sqrt{|\psi\rangle\langle\psi|\widetilde{\rho}|\psi\rangle\langle\psi|}\right]^2 \\
&= \left[\mathrm{tr}\sqrt{\langle\psi|\widetilde{\rho}|\psi\rangle|\psi\rangle\langle\psi|}\right]^2 \\
&= |\langle\psi|\widetilde{\rho}|\psi\rangle|\,(\mathrm{tr}\rho)^2 \\
&= |\langle\psi|\widetilde{\rho}|\psi\rangle|.
\end{aligned}$$

(iii) С учетом соотношения из пункта (ii) вычислим метрику

$$D_B(\rho,\sigma) = 2 - 2\mathcal{F}(\rho,\sigma) = 2 - 2|\langle\psi|\sigma|\psi\rangle|.$$

При

$$\sigma = |\alpha|^2|00\rangle\langle 00| + |\beta|^2|11\rangle\langle 11|$$

она равна

$$\begin{aligned}
D_B(\rho,\sigma) &= 2 - 2(|\alpha^4| + |\beta|^4) \\
&= 2 - 2(|\alpha^4| + (1-|\alpha|^2)^2) \\
&= 4|\alpha|^2(1-|\alpha|^2)\,.
\end{aligned}$$

Очевидно, состояние σ не является запутанным. При $|\alpha|^2 = 0$ или $|\alpha|^2 = 1$ очевидно, что достигается минимум. Поэтому рассмотрим промежуточные значения $0 < |\alpha|^2 < 1$. Обозначим через ν любую матрицу плотности из $\mathbf{C}^4$. Предположим также, что $\lambda \in [0,1]$. Выпуклая функция

$$\sigma(\lambda) := \lambda\sigma + (1-\lambda)\nu$$

также является матрицей плотности. Учитывая, что величина $\langle\psi|\nu|\psi\rangle$ — вещественная, получим

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}D_B(\rho,\sigma(\lambda))\Big|_{\lambda=1} &= -2\frac{d}{d\lambda}\left|\lambda\langle\psi|\sigma|\psi\rangle + (1-\lambda)\langle\psi|\nu|\psi\rangle\right|\Big|_{\lambda=1} \\
&= -2\frac{d}{d\lambda}\left|\lambda(|\alpha|^4+|\beta|^4) + (1-\lambda)\langle\psi|\nu|\psi\rangle\right|\Big|_{\lambda=1} \\
&= \begin{cases} -2(|\alpha|^4+|\beta|^4-\langle\psi|\nu|\psi\rangle) & |\alpha|^4+|\beta|^4 \geqslant 0 \\ +2(|\alpha|^4+|\beta|^4-\langle\psi|\nu|\psi\rangle) & |\alpha|^4+|\beta|^4 < 0 \end{cases} \\
&= -2(|\alpha|^4+|\beta|^4-\langle\psi|\nu|\psi\rangle) \\
&= -2((|\alpha|^2+|\beta|^2)^2 - 2|\alpha|^2|\beta|^2 - \langle\psi|\nu|\psi\rangle) \\
&= -2(-2|\alpha|^2|\beta|^2 + 1 - \langle\psi|\nu|\psi\rangle).
\end{aligned}$$

Если ν достаточно близко к $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, то

$$1 - \langle\psi|\nu|\psi\rangle < 2|\alpha|^2|\beta|^2$$

и $D_B(\rho,\sigma(\lambda))$ являются возрастающими вблизи σ. Поэтому минимум достигается в точке $4|\alpha|^2(1-|\alpha|^2)$.

(iv) При $|\alpha| \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$4|\alpha|^2(1-|\alpha|^2) \leqslant -|\alpha|^2\log_2|\alpha|^2 - (1-|\alpha|^2)\log_2(1-|\alpha|^2).$$

Задача 19. Двухточечная *модель Хаббарда* с циклическими граничными условиями имеет вид

$$\widehat{H} = t(c_{1\uparrow}^\dagger c_{2\uparrow} + c_{1\downarrow}^\dagger c_{2\downarrow} + c_{2\uparrow}^\dagger c_{1\uparrow} + c_{2\downarrow}^\dagger c_{1\downarrow}) + U(n_{1\uparrow}n_{1\downarrow} + n_{2\uparrow}n_{2\downarrow}),$$

где

$$n_{j\uparrow} := c_{j\uparrow}^\dagger c_{j\uparrow}, \quad n_{j\downarrow} := c_{j\downarrow}^\dagger c_{j\downarrow}.$$

Операторы Ферми $c^\dagger_{j\uparrow}, c^\dagger_{j\downarrow}, c_{j\uparrow}, c_{j\downarrow}$ удовлетворяют *соотношениям антикоммутативности*

$$[c^\dagger_{j,\sigma}, c_{k,\sigma'}]_+ = \delta_{\sigma\sigma'}\delta_{jk}I, \quad [c^\dagger_{j,\sigma}, c^\dagger_{k,\sigma'}]_+ = [c_{j,\sigma}, c_{k,\sigma'}]_+ = 0.$$

Оператор $\widehat{H}$ коммутирует с оператором полного числа частиц $\widehat{N}$ и оператором полной проекции спина $\widehat{S}_z$ на направление z:

$$\widehat{N} := \sum_{j=1}^{2}(c^\dagger_{j\uparrow}c_{j\uparrow} + c^\dagger_{j\downarrow}c_{j\downarrow}),$$
$$\widehat{S}_z := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(c^\dagger_{j\uparrow}c_{j\uparrow} - c^\dagger_{j\downarrow}c_{j\downarrow}).$$

Рассмотрим подпространство с двумя электронами, $N = 2$ и $S_z = 0$. Базис для двух частиц с полным спином 0 имеет вид

$$|s_1\rangle := c^\dagger_{1\uparrow}c^\dagger_{1\downarrow}|0\rangle, \quad |s_2\rangle := c^\dagger_{1\uparrow}c^\dagger_{2\downarrow}|0\rangle, \quad |s_3\rangle := c^\dagger_{2\uparrow}c^\dagger_{1\downarrow}|0\rangle, \quad |s_4\rangle := c^\dagger_{2\uparrow}c^\dagger_{2\downarrow}|0\rangle,$$

где $\langle 0|0\rangle = 1$.

(i) Найти матричное представление $\widehat{H}$ в этом базисе.

(ii) Можно ли переписать матричное представление $\widehat{H}$ в виде $\widehat{H} = A_1 \otimes I_2 + I_2 \otimes A_2$, где A_1 и A_2 — матрицы размера 2×2, и I_2 — единичная матрица 2×2?

Решение 19. (i) Применив $\widehat{H}$ к базису, получим

$$\begin{aligned}
\widehat{H}|s_1\rangle &= t|s_2\rangle + t|s_3\rangle + U|s_1\rangle,\\
\widehat{H}|s_2\rangle &= t|s_1\rangle + t|s_4\rangle,\\
\widehat{H}|s_3\rangle &= t|s_1\rangle + t|s_4\rangle,\\
\widehat{H}|s_4\rangle &= t|s_2\rangle + t|s_3\rangle + U|s_4\rangle.
\end{aligned}$$

Приравняв $|s_i\rangle$ к элементам $\mathbf{e}_i$ стандартного базиса в пространстве $\mathbf{C}^4$, получим матричное представление оператора $\widehat{H}$:

$$\widehat{H} = \begin{pmatrix} U & t & t & 0 \\ t & 0 & 0 & t \\ t & 0 & 0 & t \\ 0 & t & t & U \end{pmatrix}.$$

(ii) Предположим, что гамильтониан $\widehat{H}$ можно представить в виде $\widehat{H} = A_1 \otimes I_2 + I_2 \otimes A_2$, где $A_1, A_2 \in M^2$, и I_2 — единичная матрица размера 2×2. В этом случае получим

$$\begin{aligned} \exp(-i\widehat{H}\tau/\hbar) &= \exp(-i\tau A_1/\hbar \otimes I_2 - i\tau I_2/\hbar \otimes A_2) \\ &= \exp(-i\tau A_1/\hbar) \otimes \exp(-i\tau A_2/\hbar). \end{aligned}$$

В этом случае с течением времени в модели сепарабельные состояния остаются сепарабельными, а запутанные состояния остаются запутанными. Однако в случае матричного представления $\widehat{H}$

$$\widehat{H} = tV_{NOT} \otimes I_2 + tI_2 \otimes V_{NOT} + \mathrm{diag}(U, 0, 0, U), \qquad V_{NOT} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Диагональную матрицу $\mathrm{diag}(U, 0, 0, U)$ нельзя записать в виде $A_1 \otimes I_2 + I_2 \otimes A_2$. Поэтому можно сделать вывод, что почти все изначально сепарабельные состояния переходят с течением времени в модели в запутанные состояния.

Задача 20. Найти матричное представление двухточечной модели Хаббарда в базисе

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(c^\dagger_{1\downarrow}c^\dagger_{1\uparrow}|0\rangle + c^\dagger_{2\downarrow}c^\dagger_{2\uparrow}|0\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(c^\dagger_{1\downarrow}c^\dagger_{2\uparrow}|0\rangle + c^\dagger_{2\downarrow}c^\dagger_{1\uparrow}|0\rangle), \right.$$

$$\left. \frac{1}{\sqrt{2}}(c^\dagger_{1\downarrow}c^\dagger_{1\uparrow}|0\rangle - c^\dagger_{2\downarrow}c^\dagger_{2\uparrow}|0\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(c^\dagger_{1\downarrow}c^\dagger_{2\uparrow}|0\rangle - c^\dagger_{2\downarrow}c^\dagger_{1\uparrow}|0\rangle) \right\}.$$

Решение 20. Двухточечная модель Хаббарда предполагает наличие дискретной симметрии при замене $1 \to 2$, $2 \to 1$. Поэтому получаем конечную группу с двумя элементами, то есть два неприводимых представления. Теоретико-групповая редукция приводит к двум инвариантным подпространствам:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(c^\dagger_{1\downarrow}c^\dagger_{1\uparrow}|0\rangle + c^\dagger_{2\downarrow}c^\dagger_{2\uparrow}|0\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(c^\dagger_{1\downarrow}c^\dagger_{2\uparrow}|0\rangle + c^\dagger_{2\downarrow}c^\dagger_{1\uparrow}|0\rangle) \right\},$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(c^\dagger_{1\downarrow}c^\dagger_{1\uparrow}|0\rangle - c^\dagger_{2\downarrow}c^\dagger_{2\uparrow}|0\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(c^\dagger_{1\downarrow}c^\dagger_{2\uparrow}|0\rangle - c^\dagger_{2\downarrow}c^\dagger_{1\uparrow}|0\rangle) \right\}.$$

Эти четыре состояния можно рассматривать как состояния Белла. В базисе Белла матричное представление модели Хаббарда имеет вид

$$\begin{pmatrix} U & 2t & 0 & 0 \\ 2t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 2t \\ 2t & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix},$$

где символ $\oplus$ означает прямую сумму.

Задача 21. Двухточечная модель Хаббарда с циклическими граничными условиями имеет вид

$$\widehat{H} = t(c_{1\uparrow}^{\dagger} c_{2\uparrow} + c_{1\downarrow}^{\dagger} c_{2\downarrow} + c_{2\uparrow}^{\dagger} c_{1\uparrow} + c_{2\downarrow}^{\dagger} c_{1\downarrow}) + U(n_{1\uparrow} n_{1\downarrow} + n_{2\uparrow} n_{2\downarrow}).$$

Найти эволюцию с течением времени начального состояния

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{1\uparrow}^{\dagger} c_{1\downarrow}^{\dagger} - c_{2\uparrow}^{\dagger} c_{2\downarrow}^{\dagger})|0\rangle$$

в условиях двухточечной модели Хаббарда. Когда состояние $|\psi(\tau)\rangle$ является запутанным?

Решение 21. Решая уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{d}{d\tau}|\psi(\tau)\rangle = \widehat{H}|\psi(\tau)\rangle,$$

находим

$$|\psi(\tau)\rangle = e^{-iU\tau/\hbar}|\psi(0)\rangle.$$

Следовательно, условие сепарабельности имеет вид

$$\exp\left(-2i\frac{\tau}{\hbar}U\right) = 0.$$

Очевидно, это уравнение не имеет корней. Таким образом, $|\psi(\tau)\rangle$ является запутанным при всех τ.

Глава 9
Телепортация

Телепортация — это передача квантовой информации с использованием классического канала и запутывания. Телепортация доказывает полезность запутывания, которое может использоваться как ресурс системы связи. В качестве простейшего примера рассмотрим телепортацию одного отдельно взятого кубита, используя два бита классической связи и одну запутанную пару (ЭПР-пару).

Задача 1. Рассмотрим следующие состояния ($a, b \in \mathbf{C}$):

$$|\psi\rangle := a|0\rangle + b|1\rangle, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \tag{1}$$

$$|\phi\rangle := |\psi\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \tag{2}$$

(i) Показать, что состояние $|\phi\rangle$ можно записать в виде

$$|\phi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \otimes (a|0\rangle + b|1\rangle) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \otimes (a|0\rangle - b|1\rangle)$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \otimes (a|1\rangle + b|0\rangle) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \otimes (a|1\rangle - b|0\rangle).$$

(ii) Описать, как можно использовать измерение состояния первых двух кубитов $|\phi\rangle$, чтобы получить состояние $|\psi\rangle$ для последнего кубита. У Алисы есть первый кубит в состоянии $|\phi\rangle$, а вторым и третьим кубитом в состоянии $|\phi\rangle$ Алиса и Боб владеют совместно (ЭПР-пара).

Решение 1. (i) Подставляя (1) в (2), мы получим

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a|000\rangle + a|011\rangle + b|100\rangle + b|111\rangle).$$

С другой стороны:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \otimes (a|0\rangle + b|1\rangle) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \otimes (a|0\rangle - b|1\rangle) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \otimes (a|1\rangle + b|0\rangle) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \otimes (a|1\rangle - b|0\rangle) \\
=\ &\frac{1}{2\sqrt{2}}(a|000\rangle + a|110\rangle + b|001\rangle + b|111\rangle) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}(a|000\rangle - a|110\rangle - b|001\rangle + b|111\rangle) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}(a|011\rangle + a|101\rangle + b|010\rangle + b|100\rangle) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}(a|011\rangle - a|101\rangle - b|010\rangle + b|100\rangle) \\
=\ &\frac{1}{\sqrt{2}}(a|000\rangle + a|011\rangle + b|100\rangle + b|111\rangle) \\
=\ &|\phi\rangle.
\end{aligned}
$$

(ii) Проведем измерения в *базисе Белла*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \right\}.$$

Из состояния $|\phi\rangle$ первые два кубита могут перейти в любое состояние Белла с равной вероятностью. Поэтому если провести измерение, получится результат, соответствующий каждому из состояний Белла. Для получения состояния $|\psi\rangle$ с помощью последнего кубита можно выполнить следующее преобразование:

Состояние Белла	Преобразование
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|00\rangle + \|11\rangle)$	I_2
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|00\rangle - \|11\rangle)$	$\|0\rangle\langle 0\| - \|1\rangle\langle 1\|$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|01\rangle + \|10\rangle)$	U_{NOT}
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|00\rangle + \|11\rangle)$	$\|0\rangle\langle 1\| - \|1\rangle\langle 0\|$

Таким образом, после измерения и проведения соответствующего преобразования получим $|\psi\rangle$, используя последний кубит. Поэтому если Алиса и Боб первоначально совместно владеют запутанной парой

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$

Алиса может провести измерение в базисе Белла для своего кубита и своей части запутанной пары и послать результат (два бита) Бобу, который применит соответствующее преобразование к его части запутанной пары. Состояние $|\psi\rangle$, таким образом, *телепортируется* из кубита Алисы в кубит Боба. Заметим, что базис Белла получается применением $U_{CNOT}(U_H \otimes I_2)$ к вычислительному базису $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Эти преобразования являются унитарными и, следовательно, обратимыми. Поэтому первые два кубита также можно измерить в вычислительном базисе после применения

$$(U_H \otimes I)U_{CNOT},$$

т. е. *телепортация* не зависит явно от возможности проводить измерения относительно базиса Белла.

Задача 2. Пусть $|\psi\rangle := a|0\rangle + b|1\rangle$ — произвольное состояние кубита, и $|\phi\rangle$ — другое произвольное состояние кубита. Обозначим через U унитарный оператор, действующий на два кубита.
(i) Определить результат измерения первых двух кубитов состояния

$$|\theta\rangle := |\psi\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(I_2 \otimes U)\left((|00\rangle + |11\rangle) \otimes |\phi\rangle\right)$$

относительно базиса Белла. Как получить преобразование $U(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle)$, используя два последних кубита?

(ii) Предположим, что состояние кубита Алисы $|\psi\rangle$, и Боба — $|\phi\rangle$. Описать, как можно применить U к $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$, используя только классическую связь и предварительное совместное запутывание. После вычисления у Алисы по-прежнему остается первый кубит преобразования $U(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle)$, и Боб должен по-прежнему иметь второй кубит преобразования $U(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle)$.

Решение 2. (i) Вычислим

$$
\begin{aligned}
|\theta\rangle &= a|0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(I_2 \otimes U)\left((|00\rangle + |11\rangle) \otimes |\phi\rangle\right) \\
&\quad + b|1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(I_2 \otimes U)\left((|00\rangle + |11\rangle) \otimes |\phi\rangle\right) \\
&= a|0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \otimes U(|0\rangle \otimes |\phi\rangle) + |1\rangle \otimes U(|1\rangle \otimes |\phi\rangle)\right) \\
&\quad + b|1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \otimes U(|0\rangle \otimes |\phi\rangle) + |1\rangle \otimes U(|1\rangle \otimes |\phi\rangle)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \otimes U(a|0\rangle \otimes |\phi\rangle) + |01\rangle \otimes U(a|1\rangle \otimes |\phi\rangle)\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle \otimes U(b|0\rangle \otimes |\phi\rangle) + |11\rangle \otimes U(b|1\rangle \otimes |\phi\rangle)\right).
\end{aligned}
$$

Разложение $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ и $|11\rangle$ в базисе Белла относительно двух первых кубитов дает

$$
\begin{aligned}
|\theta\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \otimes U\left((a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes |\phi\rangle\right) \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \otimes U\left((a|0\rangle - b|1\rangle) \otimes |\phi\rangle\right) \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \otimes U\left((a|1\rangle + b|0\rangle) \otimes |\phi\rangle\right) \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \otimes U\left((a|1\rangle - b|0\rangle) \otimes |\phi\rangle\right).
\end{aligned}
$$

Проведем измерения в *базисе Белла*

$$
\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \right\}.
$$

С учетом выражения для $|\theta\rangle$ можно видеть, что первые два кубита находятся в одном из состояний Белла с равной вероятностью. Если провести измерение, получится результат, соответствующий каждому из состояний Белла. Чтобы получить $U(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle)$, используя два последних кубита, можно провести следующее преобразование:

Состояние Белла	Преобразование
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|00\rangle + \|11\rangle)$	I_2
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|00\rangle - \|11\rangle)$	$U\left((\|0\rangle\langle 0\| - \|1\rangle\langle 1\|) \otimes I_2\right)U^*$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|01\rangle + \|10\rangle)$	$U(U_{NOT} \otimes I_2)U^*$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|00\rangle + \|11\rangle)$	$U\left((\|0\rangle\langle 1\| - \|1\rangle\langle 0\|) \otimes I_2\right)U^*$

Таким образом, после измерения и проведения соответствующего преобразования, используя два последних кубита, получим $U(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle)$. Если Алиса и Боб совместно владеют запутанной парой

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$

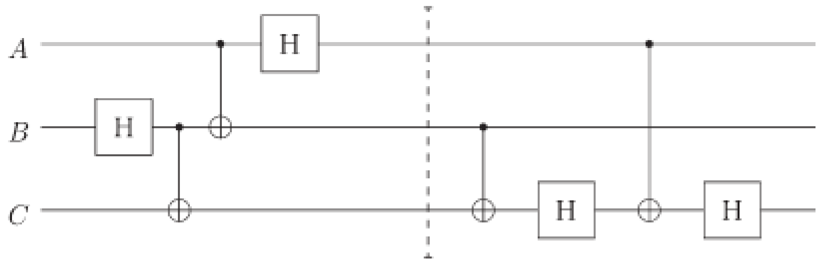
Боб применяет оператор U к своим двум кубитам. Затем Алиса может провести измерение в базисе Белла для своего кубита и своей части запутанной пары, и затем послать результат (два бита) Бобу, который применяет соответствующее преобразование из таблицы к своей части запутанной пары. Таким образом, с вероятностью $\frac{1}{4}$ Боб может начать вычисление $U(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle)$, не зная состояния $|\psi\rangle$, и по-прежнему получить правильный результат после того, как Алиса измеряет свои два кубита. С вероятностью $\frac{3}{4}$ он должен применить преобразование, которое не зависит от $|\psi\rangle$.

(ii) Алиса телепортирует $|\psi\rangle$ Бобу с помощью одной запутанной пары, Боб проводит вычисление $U(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle)$ на своих двух кубитах, и затем телепортирует первый кубит обратно Алисе с помощью второй запутанной пары. Таким образом, в этой схеме используются 4 бита коммуникации (Алиса посылает два бита Бобу, и затем Боб посылает два Алисе). Алиса и Боб могут выполнить U_{CNOT}, даже если их кубиты пространственно разделены, в случае когда присутствует предварительное запутывание.

Задача 3. При квантовой телепортации следующее состояние в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^8$ будем считать начальным:

$$|\psi\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |\psi 00\rangle,$$

где $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Квантовая цепь телепортации имеет вид



где A — это входное состояние $|\psi\rangle$, B — входное состояние $|0\rangle$ и C — входное состояние $|0\rangle$. Исследовать, что происходит, когда на вход квантовой цепи подается состояние произведения $|\psi 00\rangle$. Согласно этой цепи мы имеем следующие восемь унитарных матриц размера 8×8 (слева направо):

$$\begin{aligned} U_1 &= I_2 \otimes U_H \otimes I_2, & U_2 &= I_2 \otimes U_{XOR}, \\ U_3 &= U_{XOR} \otimes I_2, & U_4 &= U_H \otimes I_2 \otimes I_2, \\ U_5 &= I_2 \otimes U_{XOR}, & U_6 &= I_2 \otimes I_2 \otimes U_H, \\ U_7 &= I_4 \oplus U_{NOT} \oplus U_{NOT}, & U_8 &= I_2 \otimes I_2 \otimes U_H, \end{aligned}$$

где символ $\oplus$ означает прямую сумму матриц и

$$U_{NOT} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Найти $U_8 U_7 U_6 U_5 U_4 U_3 U_2 U_1 |\psi 00\rangle$.

(ii) Написать программу, которая реализует и проверяет алгоритм телепортации.

Решение 3. (i) Применяя первые четыре унитарные матрицы к состоянию на входе, получаем

$$\begin{aligned} &U_4 U_3 U_2 U_1 |\psi 00\rangle \\ &= \frac{a}{2}(|000\rangle + |100\rangle + |011\rangle + |111\rangle) + \frac{b}{2}(|010\rangle - |110\rangle + |001\rangle - |101\rangle). \end{aligned}$$

Это состояние можно переписать в виде

$$U_4U_3U_2U_1|\psi 00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (\frac{a}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle))$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes (\frac{b}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle)).$$

Применяя все восемь унитарных матриц к состоянию на входе, получаем

$$U_8U_7U_6U_5U_4U_3U_2U_1|\psi 00\rangle$$
$$= \frac{a}{2}(|000\rangle + |100\rangle + |010\rangle + |110\rangle) + \frac{b}{2}(|011\rangle + |111\rangle + |001\rangle + |101\rangle).$$

Это состояние можно переписать в виде

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right) \otimes |\psi\rangle.$$

Состояние $|\psi\rangle$ будет передано на нижний выход, тогда как оба других выхода окажутся в состоянии $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Если два верхних вывода квантовой цепи измеряются в стандартном базисе ($|0\rangle$ и $|1\rangle$), то помимо квантового состояния $|\psi\rangle$ на нижнем выводе цепи возникают два случайных классических бита.

(ii) Реализация на языке SymbolicC++ будет следующей. Класс `Matrix` языка SymbolicC++ включает в себя метод `kron`, реализующий кронекерово произведение двух матриц, и метод `dsum`, реализующий прямую сумму двух матриц. Перегруженные операторы `*` и `+` используются для матричного умножения и сложения. Кроме этого, реализована единичная матрица. Код для квантовой цепи имеет вид

```
#include <iostream>
#include "Vector.h"
#include "Matrix.h"
#include "Rational.h"
#include "Msymbol.h"
using namespace std;

typedef Sum<Rational<int> > C;
```

```
template <class T> Vector<T> Teleport(Vector<T> v)
{
 int i;
 assert(v.length() == 8);
 Vector<T> result;

 Matrix<T> NOT(2,2);
 NOT[0][0] = T(0); NOT[0][1] = T(1);
 NOT[1][0] = T(1); NOT[1][1] = T(0);

 Matrix<T> H(2,2);
 H[0][0] = T(1)/sqrt(T(2)); H[0][1] = T(1)/sqrt(T(2));
 H[1][0] = T(1)/sqrt(T(2)); H[1][1] = T(-1)/sqrt(T(2));

 Matrix<T> I(2,2);
 I.identity();

 Matrix<T> X(4,4);
 X[0][0] = T(1); X[0][1] = T(0);
 X[0][2] = T(0); X[0][3] = T(0);
 X[1][0] = T(0); X[1][1] = T(1);
 X[1][2] = T(0); X[1][3] = T(0);
 X[2][0] = T(0); X[2][1] = T(0);
 X[2][2] = T(0); X[2][3] = T(1);
 X[3][0] = T(0); X[3][1] = T(0);
 X[3][2] = T(1); X[3][3] = T(0);

 Matrix<T> U1=kron(I,kron(H,I));
 Matrix<T> U2=kron(I,X);
 Matrix<T> U3=kron(X,I);
 Matrix<T> U4=kron(H,kron(I,I));
 Matrix<T> U5=kron(I,X);
 Matrix<T> U6=kron(I,kron(I,H));
 Matrix<T> U7=dsum(I,dsum(I,dsum(NOT,NOT)));
 Matrix<T> U8=kron(I,kron(I,H));

 result=U8*(U7*(U6*(U5*(U4*(U3*(U2*(U1*v)))))));
 for(i=0;i<8;i++)
 {
```

```
 while(result[i].put(power(sqrt(T(2)),-6),
 power(T(2),-3)));
 while(result[i].put(power(sqrt(T(2)),-4),
 power(T(2),-2)));
 while(result[i].put(power(sqrt(T(2)),-2),
 power(T(2),-1)));
 }
 return result;
}

// Результат после измерения значения кубита.
// Поскольку вероятности могут быть символическими,
// эта функция не моделирует измерение, когда случайные
// результаты на выходе имеют правильное распределение

template <class T>
Vector<T> Measure(Vector<T> v,unsigned int qubit,
 unsigned int value)
{
 assert(pow(2,qubit)<v.length());
 assert(value==0 || value==1);
 int i,len,skip = 1-value;
 Vector<T> result(v);
 T D = T(0);
 len = v.length()/int(pow(2,qubit+1));
 for(i=0;i<v.length();i++)
 {
 if(!(i%len)) skip = 1-skip;
 if(skip) result[i] = T(0);
 else D += result[i]*result[i];
 }
 result/=sqrt(D);
 return result;
}

// для прозрачности вывода
ostream &print(ostream &o,Vector<C> v)
{
 char *b2[2]={"|0>","|1>"};
 char *b4[4]={"|00>","|01>","|10>","|11>"};
```

```
 char *b8[8]={"|000>","|001>","|010>","|011>",
 "|100>","|101>","|110>","|111>"};
 char **b, i;

 if(v.length()==2) b=b2;
 if(v.length()==4) b=b4;
 if(v.length()==8) b=b8;
 for(i=0;i<v.length();i++)
 if(!v[i].is_Number() || v[i].nvalue()!=C(0))
 o << "+(" << v[i] << ")" << b[i];
 return o;
}

int main(void)
{
 Vector<C> zero(2),one(2);
 Vector<C> qreg;
 Vector<C> tp00,tp01,tp10,tp11,psiGHZ;
 Sum<Rational<int> > a("a",0),b("b",0);
 int i;
 zero[0] = C(1); zero[1] = C(0);
 one[0] = C(0); one[1] = C(1);

 qreg=kron(a*zero+b*one,kron(zero,zero))(0);
 cout << "UTELEPORT("; print(cout,qreg) << ") = ";
 print(cout,qreg=Teleport(qreg)) << endl;
 cout << "Результаты после измерения";
 cout << "первых 2 кубитов:" << endl;
 tp00 = Measure(Measure(qreg,0,0),1,0);
 tp01 = Measure(Measure(qreg,0,0),1,1);
 tp10 = Measure(Measure(qreg,0,1),1,0);
 tp11 = Measure(Measure(qreg,0,1),1,1);
 for(i=0;i<8;i++)
 {
 while(tp00[i].put(a*a,C(1)-b*b));
 while(tp00[i].put(power(sqrt(C(1)/C(2)),-2),C(2)));
 while(tp01[i].put(a*a,C(1)-b*b));
 while(tp01[i].put(power(sqrt(C(1)/C(2)),-2),C(2)));
 while(tp10[i].put(a*a,C(1)-b*b));
 while(tp10[i].put(power(sqrt(C(1)/C(2)),-2),C(2)));
```

```
 while(tp11[i].put(a*a,C(1)-b*b));
 while(tp11[i].put(power(sqrt(C(1)/C(2)),-2),C(2)));
 }
 cout << " |00> : " ; print(cout,tp00) << endl;
 cout << " |01> : " ; print(cout,tp01) << endl;
 cout << " |10> : " ; print(cout,tp10) << endl;
 cout << " |11> : " ; print(cout,tp11) << endl;
 cout << endl;
 return 0;
}
```

Программа выводит следующую информацию:

```
UTELEPORT(+(a)|000>+(b)|100>) =
 +(1/2*a)|000>+(1/2*b)|001>+(1/2*a)|010>
 +(1/2*b)|011>+(1/2*a)|100>+(1/2*b)|101>
 +(1/2*a)|110>+(1/2*b)|111>
Результаты после измерения первых 2 кубитов:
 |00> : +(a)|000>+(b)|001>
 |01> : +(a)|010>+(b)|011>
 |10> : +(a)|100>+(b)|101>
 |11> : +(a)|110>+(b)|111>
```

Глава 10
Клонирование

Клонирование — это дублирование информации. Клонирование — обязательно физический процесс. В этой главе даны задачи, описывающие, какие типы информации можно клонировать точно и какие существуют методики клонирования некоторых типов информации.

Задача 1. *Вентиль CNOT* отображает ($a, b \in \{0, 1\}$)

$$|a\rangle \otimes |b\rangle \to |a\rangle \otimes |a \oplus b\rangle,$$

где символ $\oplus$ означает операцию XOR. Показать, что вентиль CNOT может быть использован для клонирования бита.

Решение 1. Полагая $b = 0$, из условия задачи получим

$$|a\rangle \otimes |0\rangle \to |a\rangle \otimes |a\rangle,$$

т. к. $a \oplus 0 = a$ для всех a. Таким образом, бит был склонирован.

Задача 2. Пусть

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad x_1 x_1^* + x_2 x_2^* = 1$$

— произвольный нормированный вектор из $\mathbf{C}^2$. Можно ли построить унитарную матрицу U размера 4×4 такую, что

$$U\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}? \tag{1}$$

Доказать или опровергнуть это равенство.

Решение 2. Такой матрицы не существует. Это можно показать следующим образом. С учетом правой части (1) получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \otimes \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, преобразуя левую часть (1), находим

$$\begin{aligned} U\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= U\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

здесь использовалось свойство линейности U. Сравнивая эти два уравнения, приходим к противоречию. Эта теорема называется теоремой *о невозможности клонирования*.

Однако равенство (1) справедливо, когда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 x_2 = 0$. Таким образом, по крайней мере один из x_1 и x_2 должен быть равен нулю. Это значит, что всё же возможно клонирование элементов известного ортонормированного базиса.

Задача 3. Пусть $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ — базис в $\mathbf{C}^2$, и $|\psi\rangle$ — состояние произвольного кубита. Существует ли унитарное преобразование такое, что

$$|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \to |\psi\rangle \otimes |0\rangle?$$

Решение 3. Такого унитарного преобразования не существует. Доказать это можно следующим образом: для состояния произвольного кубита $|\psi\rangle$ составные состояния $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$ порождают трехмерное подпространство четырехмерного гильбертова пространства $\mathbf{C}^4$ двух кубитов. Однако составные состояния $|\psi\rangle \otimes |0\rangle$ порождают только двухмерное подпространство, поскольку $|0\rangle$ — фиксированное состояние. Поэтому это унитарное преобразование переводило бы систему с *энтропией фон Неймана* $\log_2 3$ в систему, с энтропией фон Неймана $\log_2 2$. Поскольку система замкнута (преобразование унитарно), такое уменьшение энтропии является нарушением *второго закона термодинамики*. Итак, из второго закона термодинамики следует, что такого унитарного преобразования не существует.

Глава 11

Квантовые алгоритмы

Алгоритм — это точное описание того, как реализовать заданную цель, например, решить вычислительную задачу.

Будем различать *классические* и *квантовые* алгоритмы (в последних используются квантовые физические ресурсы)

В следующих задачах нас главным образом будут интересовать вычислительные задачи и задачи теории связи.

Задача 1. В рамках теории сложности классических коммуникационных процессов Алиса имеет дело с двоичной строкой

$$\mathbf{x} = x_0 x_1 \cdots x_{n-1}$$

длины n, и Боб — с двоичной строкой

$$\mathbf{y} = y_0 y_1 \cdots y_{n-1}$$

длины n. Алисе необходимо определить булеву функцию

$$f : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\},$$

обмениваясь при этом наименьшим количеством информации с Бобом.

(i) Рассмотрим *парную функцию*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_0 \oplus x_1 \oplus \cdots \oplus x_{n-1} \oplus y_0 \oplus y_1 \oplus \cdots \oplus y_{n-1},$$

где $\oplus$ — *операция XOR*, т.е.

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1, \quad 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0.$$

Сколько бит Боб должен послать Алисе, чтобы она смогла определить f?

(ii) Рассмотрим функцию скалярного произведения по модулю 2

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x_0 \cdot y_0) \oplus (x_1 \cdot y_1) \oplus \cdots \oplus (x_{n-1} \cdot y_{n-1}),$$

где символ $\cdot$ означает *операцию AND*, т. е.

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Определить минимальное число бит, которое Боб должен послать Алисе, чтобы она могла вычислить эту функцию.

Решение 1. (i) Очевидно, Боб должен послать только один бит, тот, который получается с помощью вычисления $y_0 \oplus y_1 \oplus \ldots \oplus y_{n-1}$.

(ii) Боб должен послать все n бит для того, чтобы Алиса вычислила f.

Задача 2. Найти все $x_A, x_B, x_C \in \{0,1\}$ такие, что $x_A + x_B + x_C = 1 \bmod 2$. Здесь используется отображение $f_1 : \{0,1\} \to U(2)$,

$$f_1(0) := U_H, \qquad f_1(1) := I_2,$$

где U_H — преобразование Уолша–Адамара, $U(2)$ означает унитарную группу над пространством $\mathbf{C}^2$. Таким образом, тройку (x_A, x_B, x_C) можно отобразить в линейные операторы, действующие на три кубита:

$$f_3(x_A, x_B, x_C) := f_1(x_A) \otimes f_1(x_B) \otimes f_1(x_C).$$

Предположим:

$$|\psi\rangle := \frac{1}{2}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle - |111\rangle).$$

Для каждой тройки (x_A, x_B, x_C), найденной в первой части задачи, вычислить

$$|\phi\rangle := f_3(x_A, x_B, x_C)|\psi\rangle.$$

Обозначим через s_A, s_B, s_C результат (0 или 1) измерения первого, второго и третьего кубита состояния $|\phi\rangle$ в вычислительном базисе. В каждом случае определить

$$s_A + s_B + s_C \bmod 2, \qquad x_A \cdot x_B \cdot x_C.$$

Решение 2. По условию задачи

$$(x_A, x_B, x_C) \in \{\,(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\,\}.$$

Отметим симметрию состояния $|\psi\rangle$ относительно расположения кубитов. Ввиду этого необходимо вычислить преобразование только для $(0,0,1)$ и $(1,1,1)$. Для $(1,1,1)$ получим $f_3(1,1,1)|\psi\rangle = (I_2 \otimes I_2 \otimes I_2)|\psi\rangle = |\psi\rangle$. Измерение состояний кубитов дает

$$(s_A, s_B, s_C) \in \{\,(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\,\}$$

с равной вероятностью. В каждом из случаев находим $s_A + s_B + s_C = 1 \bmod 2$. Для $(0,0,1)$ получим $f_3(0,0,1) = U_H \otimes U_H \otimes I_2$. Поскольку

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|01\rangle + |10\rangle) \otimes |0\rangle + \frac{1}{2}(|00\rangle - |11\rangle) \otimes |1\rangle,$$

то

$$f_3(0,0,1)|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |11\rangle) \otimes |0\rangle + \frac{1}{2}(|01\rangle + |10\rangle) \otimes |1\rangle.$$

Получим, что измерение состояний кубитов дает

$$(s_A, s_B, s_C) \in \{\,(0,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\,\}$$

с равной вероятностью. В каждом из случаев находим $s_A + s_B + s_C = 0 \bmod 2$.

(x_A, x_B, x_C)	$x_A \cdot x_B \cdot x_C$	$s_A + s_B + s_C \bmod 2$
(0,0,1)	0	0
(0,1,0)	0	0
(1,0,0)	0	0
(1,1,1)	1	1

Очевидно, что $s_A + s_B + s_C = x_A \cdot x_B \cdot x_C \bmod 2$. Предположим, Алиса, Боб и Кэрол каждый работает со строкой битов $(x_{A,1}, \ldots, x_{A,n})$, $(x_{B,1}, \ldots, x_{B,n})$ и $(x_{C,1}, \ldots, x_{C,n})$ соответственно. И предположим, что они хотят вычислить величину

$$f(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_C) = \sum_{j=1}^{n} (x_{A,j} \cdot x_{B,j} \cdot x_{C,j}) \bmod 2,$$

обмениваясь (передав) как можно меньшим количеством информации. Если Алиса, Боб и Кэрол владеют совместно n тройками кубитов в состоянии $|\psi\rangle$, они могут вычислить $s_{A,1},\ldots,s_{A,n}$, $s_{B,1},\ldots,s_{B,n}$ и $s_{C,1},\ldots,s_{C,n}$ в соответствии с вышесказанным. Таким образом,

$$f(\mathbf{x}_A,\mathbf{x}_B,\mathbf{x}_C)=\sum_{j=1}^{n}(s_{A,j}+s_{B,j}+s_{C,j}) \bmod 2.$$

Если Алиса, Боб и Кэрол вычисляют величину

$$S_{A|B|C}=\sum_{j=1}^{n} S_{A|B|C,j} \bmod 2,$$

то Бобу и Кэрол каждому необходимо переслать только один бит (S_B и S_C) Алисе, чтобы вычислить $f(\mathbf{x}_A,\mathbf{x}_B,\mathbf{x}_C)=S_A+S_B+S_C$, для всех n. Другими словами, *коммуникационная сложность* равна 2. В классическом случае, при $n\geqslant 3$, для связи нужны три бита информации.

Задача 3. (i) Найти все $x,y,z\in\{0,1,2,3\}$ такие, что

$$x+y+z=0 \bmod 2. \qquad (1)$$

Какие возможные значения принимает функция

$$f(x,y,z):=\frac{(x+y+z)\bmod 4}{2},$$

если условие (1) выполнено?

(ii) Используем двоичное представление для $x=x_1x_0$, $y=y_1y_0$ и $z=z_1z_0$, где $x_0,x_1,y_0,y_1,z_0,z_1\in\{0,1\}$. Записать условие $x+y+z= 0 \bmod 2$ с помощью x_0,x_1,y_0,y_1,z_0 и z_1.

(iii) Рассмотрим отображение

$$f_1(0)=I_2,\qquad f_1(1)=U_H\,.$$

С помощью него можно отобразить тройку (x_0,y_0,z_0) в линейные операторы, действующие на три кубита:

$$f_3(x_0,y_0,z_0)=f_1(x_0)\otimes f_1(y_0)\otimes f_1(z_0).$$

Пусть

$$|\psi\rangle := \frac{1}{2}(|000\rangle - |011\rangle - |101\rangle - |110\rangle).$$

Для каждой тройки (x_0, y_0, z_0), полученной в пункте (i), вычислить

$$|\phi\rangle := f_3(x_0, y_0, z_0)|\psi\rangle.$$

Обозначим через s_x, s_y, s_z результат (0 или 1) измерения соответствующих состояний $|\phi\rangle$ первого, второго и третьего кубита в вычислительном базисе. В каждом из случаев определить

$$s_x + s_y + s_z \bmod 2, \qquad x_0 + y_0 + z_0.$$

Решение 3. (i) Очевидно, величина $x + y + z$ должна быть четной. Поэтому сумма включает только четное число (0 или 2) нечетных чисел. В итоге получим девять комбинаций:

$$(0,0,0), (0,1,1), (0,0,2), (1,1,2), (0,2,2), (0,1,3), (2,2,2), (1,2,3), (0,3,3).$$

(ii) Пусть (x, y, z) — элемент из множества всех перестановок элементов множества, заданного выше. Если $x + y + z$ — четно, $(x + y + z) \bmod 4 \in \{0, 2\}$. Если $x+y+z = 0 \bmod 2$, получим $f(x, y, z) \in \{0, 1\}$. Так как $x+y + z = 0 \bmod 2$, наименьший значащий бит суммы должен равняться нулю. Наименьший значащий бит определяется соотношением $x_0 \oplus y_0 \oplus z_0 = 0$. Получим

$$f(x, y, z) = x_1 \oplus y_1 \oplus z_1 \oplus (x_0 + y_0 + z_0),$$

где операция XOR обозначена через «$\oplus$», и OR через «$+$». В результате

$$(x_0, y_0, z_0) \in \{\, (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0) \,\}.$$

(iii) Отметим симметрию состояния $|\psi\rangle$ относительно расположения кубитов. Ввиду этого необходимо вычислить преобразование только для $(0,0,0)$ и $(0,1,1)$. Для $(0,0,0)$ получим

$$f_3(0,0,0)|\psi\rangle = I_2 \otimes I_2 \otimes I_2|\psi\rangle = |\psi\rangle.$$

Измерение кубитов дает

$$(s_x, s_y, s_z) \in \{\, (0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0) \,\}$$

с равной вероятностью. В каждом из случаев находим $s_x + s_y + s_z = 0 \bmod 2$. Для $(0,1,1)$ получим $f_3(0,1,1) = I_2 \otimes U_H \otimes U_H$. Заметим, что состояние $|\psi\rangle$ может быть записано в виде

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle \otimes (|00\rangle - |11\rangle) - \frac{1}{2}|1\rangle \otimes (|01\rangle + |10\rangle).$$

Следовательно:

$$f_3(0,1,1)|\psi\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle \otimes (|01\rangle + |10\rangle) - \frac{1}{2}|1\rangle \otimes (|00\rangle - |11\rangle).$$

Измерение показывает, что состояния кубитов

$$(s_x, s_y, s_z) \in \{\,(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1),(1,1,1)\,\}$$

характеризуются равной вероятностью. В каждом из случаев получим $s_x + s_y + s_z = 1 \bmod 2$.

(x_0, y_0, z_0)	$x_0 + y_0 + z_0$	$s_x + s_y + s_z \bmod 2$
(0,0,0)	0	0
(0,1,1)	1	1
(1,0,1)	1	1
(1,1,0)	1	1

Из таблицы очевидно, что $(s_x + s_y + s_z \bmod 2) = x_0 + y_0 + z_0$. Таким образом, чтобы вычислить $f(x,y,z)$ в случае трех участников, где каждая из сторон владеет одним из x, y и z, достаточно, чтобы каждая из сторон послала один бит ($x_1 \oplus s_x$, или $y_1 \oplus s_y$, или $z_1 \oplus s_z$) другим участникам. Другими словами, каждый участник может вычислить

$$x_1 \oplus s_x \oplus y_1 \oplus s_y \oplus z_1 \oplus s_z = x_1 \oplus y_1 \oplus z_1 \oplus (x_0 + y_0 + z_0) = f(x,y,z)$$

после сеанса связи. Иначе говоря, передачи трех битов всем сторонам достаточно, чтобы вычислить $f(x,y,z)$; *коммуникационная сложность* составляет 3 бита. В классическом случае необходима передача 4 битов.

Задача 4. (i) Определить собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A(x) := (1-x)I_2 + xU_{NOT}, \quad x \in \{0,1\}.$$

(ii) Показать, что унитарное преобразование

$$\begin{aligned} U_f &= |0f(0)\rangle\langle 00| + |0\overline{f(0)}\rangle\langle 01| \\ &\quad + |1f(1)\rangle\langle 10| + |1\overline{f(1)}\rangle\langle 11|, \end{aligned}$$

где $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ — булева функция, а символ $\overline{x}$ означает булево отрицание x, может быть записано в виде

$$U_f = |0\rangle\langle 0| \otimes A(f(0)) + |1\rangle\langle 1| \otimes A(f(1)).$$

(iii) Вычислить

$$U_f \left(I_2 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \right).$$

Рассмотреть случаи $f(0) = f(1)$ и $f(0) \neq f(1)$.

Решение 4. (i) Очевидно, $A(0) = I_2$ и $A(1) = U_{NOT}$. Таким образом, собственное число A_0 равно 1 (кратность равна двум), а $A(1)$ имеет собственные числа 1 и -1. Представим собственные числа и соответствующие собственные векторы $A(x)$ в виде таблицы

собственное число	собственный вектор
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 0\rangle + \lvert 1\rangle)$
$(-1)^x$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 0\rangle - \lvert 1\rangle)$

(ii) Проводя преобразования, получим

$$\begin{aligned} U_f &= (1 - f(0))|00\rangle\langle 00| + f(0)|01\rangle\langle 00| + f(0)|00\rangle\langle 01| + (1 - f(0))|01\rangle\langle 01| \\ &\quad + (1 - f(1))|10\rangle\langle 10| + f(1)|11\rangle\langle 10| + f(1)|10\rangle\langle 11| + (1 - f(1))|11\rangle\langle 11| \\ &= |0\rangle\langle 0| \otimes ((1 - f(0))|0\rangle\langle 0| + f(0)|1\rangle\langle 0|) + |0\rangle\langle 0| \otimes (f(0)|0\rangle\langle 1| \\ &\quad + (1 - f(0))|1\rangle\langle 1|) \\ &\quad + |1\rangle\langle 1| \otimes ((1 - f(1))|0\rangle\langle 0| + f(1)|1\rangle\langle 0|) + |1\rangle\langle 1| \otimes (f(1)|0\rangle\langle 1| \\ &\quad + (1 - f(1))|1\rangle\langle 1|) \\ &= |0\rangle\langle 0| \otimes ((1 - f(0))(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + f(0)(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)) \\ &\quad + |1\rangle\langle 1| \otimes ((1 - f(1))(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + f(1)(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)) \\ &= |0\rangle\langle 0| \otimes A(f(0)) + |1\rangle\langle 1| \otimes A(f(1)). \end{aligned}$$

(iii) Проводя преобразования, получим

$$\begin{aligned}
U_f\left(I_2\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\right) &= |0\rangle\langle 0|\otimes A(f(0))\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\\
&\quad +|1\rangle\langle 1|\otimes A(f(1))\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\\
&= |0\rangle\langle 0|\otimes(-1)^{f(0)}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\\
&\quad +|1\rangle\langle 1|\otimes(-1)^{f(1)}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\\
&= (-1)^{f(0)}|0\rangle\langle 0|\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\\
&\quad +(-1)^{f(1)}|1\rangle\langle 1|\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\\
&= \left((-1)^{f(0)}\left(|0\rangle\langle 0|+(-1)^{f(0)+f(1)}|1\rangle\langle 1|\right)\otimes I_2\right)\\
&\quad\times\left(I_2\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\right).
\end{aligned}$$

При $f(0)=f(1)$ к первому кубиту применяется тождественное преобразование, и при $f(0)\neq f(1)$ к первому кубиту применяется операция изменения фазы. Собственные числа $(-1)^{f(0)}$ и $(-1)^{f(1)}$ означают возврат к состояниям первого кубита. Изменение фазы, скомбинированное с двумя преобразованиями Уолша–Адамара в подходящем порядке, реализует вентиль NOT.

Задача 5. (i) Алиса и Боб совместно владеют n запутанными парами вида $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$. Их совместное состояние $2n$ кубитов можно записать в виде обобщенного состояния Белла

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{j=0}^{2^n-1}|j\rangle\otimes|j\rangle, \tag{1}$$

где первые n кубитов принадлежат Алисе, и оставшиеся n кубитов — Бобу. Кроме того, Алиса оперирует 2^n битами $a_0,\dots,a_{2^n-1}$, и Боб — 2^n

битами $b_0, \ldots, b_{2^n-1}$. Введем унитарные операторы U_{PA} и U_{PB}, действующие на вычислительный базис следующим образом:

$$U_{PA}|j\rangle = (-1)^{a_j}|j\rangle, \qquad j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1,$$
$$U_{PB}|j\rangle = (-1)^{b_j}|j\rangle, \qquad j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1.$$

И пусть

$$|\phi\rangle := (U_{PA} \otimes U_{PB})|\psi\rangle. \tag{2}$$

Вычислить

$$\left(\bigotimes_n U_H\right) \otimes \left(\bigotimes_n U_H\right) |\phi\rangle. \tag{3}$$

(ii) Для каждого из следующих случаев:

$$(a) \quad a_0 = b_0,\, a_1 = b_1\,, \ldots,\, a_{2^n-1} = b_{2^n-1}$$
$$(b) \quad \sum_{k=0}^{2^n-1} |a_k - b_k| = 2^{n-1}$$

определить, когда измерение первых n кубитов в вычислительном базисе дает тот же результат, что и измерение оставшихся n кубитов в вычислительном базисе.

Решение 5. (i) Из (1) и (2) следует, что

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} (-1)^{a_j+b_j}|j\rangle \otimes |j\rangle.$$

Подставляя это выражение в (3), получим

$$\left(\bigotimes_n U_H\right) \otimes \left(\bigotimes_n U_H\right) |\phi\rangle = \frac{1}{(2\sqrt{2})^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{l=0}^{2^n-1} (-1)^{a_j+b_j+j*k+j*l}|k\rangle \otimes |l\rangle,$$

так как

$$\begin{aligned}\left(\bigotimes_n U_H\right)|j\rangle &= \bigotimes_{s=0}^{n-1} U_H|j_s\rangle = \bigotimes_{s=0}^{n-1} U_H \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^{j_s}|1\rangle) \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^{j_0k_0+j_1k_1+\cdots+j_{n-1}k_{n-1}}|k\rangle,\end{aligned}$$

где j и k раскладываются следующим образом:

$$j = j_0 + j_1 2 + j_2 4 + \cdots + j_{n-1} 2^{n-1}, \qquad k = k_0 + k_1 2 + k_2 4 + \cdots + k_{n-1} 2^{n-1}$$

и

$$\begin{aligned} j * k &:= (j_0 \cdot k_0) \oplus (j_1 \cdot k_1) \oplus \cdots \oplus (j_{n-1} \cdot k_{n-1}) \\ &= j_0 k_0 + j_1 k_1 + \cdots + j_{n-1} k_{n-1} \bmod 2\,. \end{aligned}$$

(ii) В случае (a) получим при $k = l$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\sqrt{2})^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} (-1)^{a_j + b_j + j*k + j*l} &= \frac{1}{(2\sqrt{2})^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} (-1)^{j*k + j*l} \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{2})^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} (-1)^{j*(k+l)} \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{2})^n} 2^n \\ &= 2^{-n/2}. \end{aligned}$$

Другими словами, вероятность измерения $|k\rangle \otimes |k\rangle$ при заданном k равна 2^{-n}. Более того,

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-n} = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} 1 = 1.$$

В случае (b) получим при $k = l$

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} (-1)^{a_j + b_j + j*k + j*l} = \sum_{j=0}^{2^n-1} (-1)^{a_j + b_j} = 0\,.$$

Таким образом, если условие (a) выполнено, измерение $2n$ кубитов в вычислительном базисе дает $|j\rangle$ и $|j\rangle$, т. е. первые n кубитов всегда дают в точности тот же результат, что и вторые n кубитов.

Если условие (b) выполнено, измерение $2n$ кубитов в вычислительном базисе дает $|j\rangle$ и $|k\rangle$, где $j \neq k$, т. е. первые n кубитов никогда не дают в точности тот же результат, что вторые n кубитов.

Задача 6. (i) Показать, что векторы

$$|0_H\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),$$

$$|1_H\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

образуют ортонормированный базис в $\mathbf{C}^2$.

(ii) Определить вероятности, связанные с обнаружением состояния $|0\rangle$ в состояниях $|0_H\rangle$ и $|1_H\rangle$.

(iii) Определить, как получить $|0_H\rangle$ и $|1_H\rangle$, используя только измерение и операцию фазового изменения

$$U_{PS} := |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|.$$

(iv) Пусть

$$f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$$

— булева функция и

$$U_f := |0f(0)\rangle\langle 00| + |0\overline{f(0)}\rangle\langle 01| + |1f(1)\rangle\langle 10| + |1\overline{f(1)}\rangle\langle 11|.$$

Выразить через $|0_H\rangle$ и $|1_H\rangle$

$$\begin{aligned} &(a) \quad U_f|0_H\rangle \otimes |0_H\rangle, \\ &(b) \quad U_f|0_H\rangle \otimes |1_H\rangle. \end{aligned}$$

Эти методики используются для решения *задачи Дойча*.

Решение 6. (i) Сначала покажем линейную независимость векторов

$$\begin{aligned} a|0\rangle + b|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)|0_H\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)|1_H\rangle, \\ a|0_H\rangle + b|1_H\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)|1\rangle. \end{aligned}$$

Если $a|0_H\rangle + b|1_H\rangle = 0$, то $a = b = 0$.

(ii) Вычислим

$$\begin{aligned}
\langle 0_H|0_H\rangle &= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle) = 1,\\
\langle 1_H|1_H\rangle &= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle - \langle 0|1\rangle - \langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle) = 1,\\
\langle 0_H|1_H\rangle &= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle - \langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle - \langle 1|1\rangle) = 0,\\
|\langle 0|0_H\rangle|^2 &= \frac{1}{2}|(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle|^2 = \frac{1}{2},\\
|\langle 0|1_H\rangle|^2 &= \frac{1}{2}|(\langle 0|0\rangle - \langle 0|1\rangle|^2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

То есть измерение проектирует состояние $|0\rangle$ на $|0_H\rangle$ и $|1_H\rangle$ с равной вероятностью.

(iii) Начиная с $|0\rangle$, мы можем получить $|0_H\rangle$ и $|1_H\rangle$ с помощью измерения в базисе $|0_H\rangle$ и $|1_H\rangle$ и применения U_{PS}

Желаемое состояние	Измерение	Преобразование
$\|0_H\rangle$	$\|0_H\rangle$	I_2
$\|0_H\rangle$	$\|1_H\rangle$	U_{PS}
$\|1_H\rangle$	$\|0_H\rangle$	U_{PS}
$\|1_H\rangle$	$\|1_H\rangle$	I_2

(iv) В случае (a) получим

$$|0_H\rangle \otimes |0_H\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle).$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}
U_f|0_H\rangle \otimes |0_H\rangle &= \frac{1}{2}(|0f(0)\rangle + |0\overline{f(0)}\rangle + |1f(1)\rangle + |1\overline{f(1)}\rangle)\\
&= \frac{1}{2}\Big((1-f(0))|00\rangle + f(0)|01\rangle + f(0)|00\rangle + (1-f(0))|01\rangle\\
&\quad +(1-f(1))|10\rangle + f(1)|11\rangle + f(1)|10\rangle + (1-f(1))|11\rangle\Big)\\
&= |0_H\rangle \otimes |0_H\rangle.
\end{aligned}$$

В случае (b) получим

$$|0_H\rangle \otimes |1_H\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle).$$

Таким образом:

$$
\begin{aligned}
U_f|0_H\rangle \otimes |1_H\rangle &= \frac{1}{2}(|0f(0)\rangle - |0\overline{f(0)}\rangle + |1f(1)\rangle - |1\overline{f(1)}\rangle) \\
&= \frac{1}{2}((1-f(0))|00\rangle + f(0)|01\rangle - f(0)|00\rangle - (1-f(0))|01\rangle \\
&\quad +(1-f(1))|10\rangle + f(1)|11\rangle - f(1)|10\rangle - (1-f(1))|11\rangle) \\
&= \frac{1}{2}((1-2f(0))|00\rangle - (1-2f(0))|01\rangle \\
&\quad +(1-2f(1))|10\rangle - (1-2f(1))|11\rangle) \\
&= \frac{1}{2}((-1)^{f(0)}|00\rangle - (-1)^{f(0)}|01\rangle \\
&\quad -(-1)^{f(1)}|10\rangle - (-1)^{f(1)}|11\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\Big((-1)^{f(0)}|0\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) + (-1)^{f(1)}|1\rangle(|0\rangle - |1\rangle)\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{f(0)}((|0\rangle - (-1)^{f(0)+f(1)}|1\rangle) \otimes |1_H\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{f(0)}((|0\rangle - (-1)^{f(0)\oplus f(1)}|1\rangle) \otimes |1_H\rangle) \\
&= (-1)^{f(0)}|f(0) \oplus f(1)_H\rangle \otimes |1_H\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Заметим, что $f(0) \oplus f(1)$ равно 0, когда функция f — константа (не зависит от аргументов), и 1, когда функция f «сбалансирована», то есть имеет различные значения для разных аргументов. Таким образом, определив $f(0) \oplus f(1)$, мы решили *задачу Дойча*.

Задача 7. Рассмотрим следующую квантовую игру G_n с числом игроков $n \geqslant 3$. Каждый игрок P_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ получает один входной бит x_j и должен дать один выходной бит y_j. Известно, что среди входных битов четное число единиц. Игрокам запрещено устанавливать связь друг с другом после получения своих входных бит. Кроме этого, от них требуется создание совместного выходного результата, который содержит четное число единиц в том и только том случае, когда число единиц на входе делится на 4. Следовательно, мы требуем, чтобы

$$\sum_{j=0}^{n-1} y_j \equiv \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} x_j \pmod{2}$$

при условии, что
$$\sum_{j=0}^{n-1} x_j \equiv 0(\mathrm{mod})2.$$

Назовем величину $\mathbf{x} = x_0 x_1 \cdots x_{n-1}$ вопросом, и величину $\mathbf{y} = y_0 y_1 \cdots y_{n-1}$ — ответом. Показать, что если n игрокам позволено совместно использовать предварительное запутывание, то они всегда могут выиграть в игре G_n.

Решение 7. Введем следующее n-кубитовое запутанное состояние в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^{2^n}$

$$|\psi_+\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\cdots 0\rangle + |11\cdots 1\rangle),$$

$$|\psi_-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\cdots 0\rangle - |11\cdots 1\rangle).$$

Преобразование Уолша–Адамара имеет вид

$$U_H|0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle,$$
$$U_H|1\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

Кроме этого, рассмотрим унитарное преобразование

$$U_S|0\rangle \to |0\rangle, \qquad U_S|1\rangle \to e^{i\pi/2}|1\rangle,$$

где $e^{i\pi/2} = i$. Если унитарное преобразование U_S применяется к любому из двух кубитов состояния $|\psi_+\rangle$, в то время как оставшиеся кубиты остаются прежними, то
$$U_S|\psi_+\rangle = |\psi_-\rangle,$$
а если U_S применяется к любому из двух кубитов состояния $|\psi_-\rangle$, то

$$U_S|\psi_-\rangle = |\psi_+\rangle.$$

Следовательно, если кубиты $|\psi_+\rangle$ распределяются среди n игроков и если в точности m из них применяют S к своему кубиту, конечным состоянием будет состояние $|\psi_+\rangle$, если $m \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$, и $|\psi_-\rangle$, если $m \equiv 2\ (\mathrm{mod}\, 4)$. Следствием приложения преобразования Уолша–Адамара к каждому из кубитов в состоянии $|\psi_+\rangle$ является появление равновероятной суперпозиции всех классических n-битовых строк, которые содержат четное число единиц. Тогда как следствием приложения преобразования Уолша–Адамара к каждому из кубитов в состоянии $|\psi_-\rangle$ является появление равновероятной суперпозиции всех классических n-битовых строк, которые содержат нечетное число единиц. Таким образом,

$$(U_H \otimes U_H \otimes \cdots \otimes U_H)|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \sum_{\Delta(\mathbf{y})=0(mod2)} |y_0 y_1 \cdots y_{n-1}\rangle,$$

$$(U_H \otimes U_H \otimes \cdots \otimes U_H)|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} \sum_{\Delta(\mathbf{y})=1(mod2)} |y_0 y_1 \cdots y_{n-1}\rangle,$$

где

$$\Delta(\mathbf{y}) := \sum_{j=0}^{n-1} y_j$$

означает *вес Хемминга* величины $\mathbf{y}$. Следовательно, стратегия игры имеет вид: вначале воспроизводится состояние $|\psi_+\rangle$, и его n кубитов распределяются среди n игроков. После разделения каждый игрок A_j получает входной бит x_j и следует следующим правилам:

1. Если $x_j = 1$, A_j применяет унитарное преобразование U_S к своему кубиту; иначе он/она ничего не делает.

2. Он/она применяет U_H к своему кубиту.

3. Он/она измеряет его/ее кубит, для того чтобы получить y_j.

4. Он/она предъявляет y_j в качестве его/ее конечного результата.

Четное число игроков подействуют преобразованием U_S на свой кубит. Если это число делится на 4, что означает четность числа $\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} x_j$, то состояние возвращается к исходному состоянию $|\psi_+\rangle$ после шага 1 и, следовательно, к суперпозиции всех $|y_0 y_1 \cdots y_{n-1}\rangle$ таких, что $\Delta(\mathbf{y}) \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$ после шага 2. Отсюда следует, что $\sum_{j=0}^{n-1} y_i$, т. е. число игроков, которые измеряют и получают в качестве конечного результата 1, четно. Если число игроков, которые применяют S к своему кубиту сравнимо с 2 по модулю 4, что означает, что величина $\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} x_j$ нечетна, то состояние переходит к состоянию $|\psi_-\rangle$ после шага 1 и, следовательно, к суперпозиции всех $|\mathbf{y}\rangle \equiv |y_0 y_1 \cdots y_{n-1}\rangle$ таких, что $\Delta(\mathbf{y}) \equiv 1 \pmod 2$ после шага 2. В этом случае сумма $\sum_{j=0}^{n-1} y_j$ нечетна. В любом случае условие (1) выполнено в конце игры.

Задача 8. Пусть $x_0, x_1, y_0, y_1 \in \{0, 1\}$, и Алиса владеет x_0 и x_1, и Боб — y_0 и y_1. Алиса и Боб хотят вычислить булеву функцию

$$g(x_0, x_1, y_0, y_1) := x_1 \oplus y_1 \oplus (x_0 \cdot y_0),$$

где символ $\oplus$ означает операцию XOR, и $\cdot$ означает операцию AND. Кроме того, известно, что Алиса и Боб совместно владеют ЭПР-парой

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle).$$

Алиса действует унитарной матрицей

$$U_R\left(-\frac{\pi}{16} + x_0\frac{\pi}{4}\right) \otimes I_2$$

на свой кубит ЭПР-пары, и Боб действует унитарной матрицей

$$I_2 \otimes U_R\left(-\frac{\pi}{16} + y_0\frac{\pi}{4}\right)$$

на свой кубит ЭПР-пары, где

$$U_R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Обозначим через a результат измерения Алисы своего кубита ЭПР-пары, и через b результат измерения Боба своего кубита ЭПР-пары. Найти вероятность того, что $a \oplus b = x_0 \cdot y_0$, где символ $\oplus$ означает булеву операцию XOR, и $\cdot$ означает булеву операцию AND.

Решение 8. Пусть $|\psi\rangle$ — состояние ЭПР-пары после того, как Алиса и Боб применили свои преобразования. Следовательно,

$$|\psi\rangle := U_R\left(-\frac{\pi}{16}+x_0\frac{\pi}{4}\right)\otimes U_R\left(-\frac{\pi}{16}+y_0\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle-|11\rangle).$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle = {} & \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg(\left(\cos(-\frac{\pi}{16}+x_0\frac{\pi}{4})|0\rangle+\sin(-\frac{\pi}{16}+x_0\frac{\pi}{4})|1\rangle\right)\\
& \otimes\left(\cos(-\frac{\pi}{16}+y_0\frac{\pi}{4})|0\rangle+\sin(-\frac{\pi}{16}+y_0\frac{\pi}{4})|1\rangle\right)\\
& -\left(-\sin(-\frac{\pi}{16}+x_0\frac{\pi}{4})|0\rangle+\cos(-\frac{\pi}{16}+x_0\frac{\pi}{4})|1\rangle\right)\\
& \otimes\left(-\sin(-\frac{\pi}{16}+y_0\frac{\pi}{4})|0\rangle+\cos(-\frac{\pi}{16}+y_0\frac{\pi}{4})|1\rangle\right)\Bigg)\\
= {} & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}+(x_0+y_0)\frac{\pi}{4}\right)|00\rangle+\sin\left(-\frac{\pi}{8}+(x_0+y_0)\frac{\pi}{4}\right)|01\rangle\right.\\
& \left.+\sin\left(-\frac{\pi}{8}+(x_0+y_0)\frac{\pi}{4}\right)|10\rangle-\cos\left(-\frac{\pi}{8}+(x_0+y_0)\frac{\pi}{4}\right)|11\rangle\right).
\end{aligned}$$

Вероятности получить a и b равны соответственно следующим значениям:

a	b	$a\oplus b$	$P(a,b)$
0	0	0	$\frac{1}{2}\cos^2\left(-\frac{\pi}{8}+(x_0+y_0)\frac{\pi}{4}\right)$
0	1	1	$\frac{1}{2}\sin^2\left(-\frac{\pi}{8}+(x_0+y_0)\frac{\pi}{4}\right)$
1	0	1	$\frac{1}{2}\sin^2\left(-\frac{\pi}{8}+(x_0+y_0)\frac{\pi}{4}\right)$
1	1	0	$\frac{1}{2}\cos^2\left(-\frac{\pi}{8}+(x_0+y_0)\frac{\pi}{4}\right)$

Далее найдем вероятность того, что

$$a\oplus b = x_0\cdot y_0$$

для заданных x_0 и y_0.

x_0	y_0	$x_0 \cdot y_0$	$P(a \oplus b = x_0 \cdot y_0)$
0	0	0	$P(a = 0, b = 0) + P(a = 1, b = 1) = \cos^2 \frac{\pi}{8}$
0	1	0	$P(a = 0, b = 0) + P(a = 1, b = 1) = \cos^2 \frac{\pi}{8}$
1	0	0	$P(a = 0, b = 0) + P(a = 1, b = 1) = \cos^2 \frac{\pi}{8}$
1	1	1	$P(a = 1, b = 0) + P(a = 0, b = 1) = \cos^2 \frac{\pi}{8}$

Искомая вероятность равна

$$P(a \oplus b = x_0 \cdot y_0) = \cos^2 \frac{\pi}{8}.$$

Глава 12

Коррекция квантовых ошибок

В классической теории передачи информации, когда передаются биты информации, единственный возможный тип ошибок, который может произойти, — переворот бита. В квантовом случае любое вращение или изменение фазы в гильбертовом пространстве квантового состояния является ошибкой, т. е. существует бесконечное число различных ошибок, которые могут произойти уже с одним, единственным кубитом. К счастью, процесс измерения включает в себя проекцию квантового состояния в совместимое подпространство. Таким образом, для определения появления ошибки измерение сводит эту ошибку к ошибке, совместимой с измерением.

Задача 1. Вычислить следующие соотношения, выражая их через I_2, X, Y, Z:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && XZ,\\
&\text{(ii)} && ZX,\\
&\text{(iii)} && U_{CNOT}(X \otimes I_2)U_{CNOT},\\
&\text{(iv)} && U_{CNOT}(I_2 \otimes X)U_{CNOT},\\
&\text{(v)} && U_{CNOT}(Z \otimes I_2)U_{CNOT},\\
&\text{(vi)} && U_{CNOT}(I_2 \otimes Z)U_{CNOT},\\
&\text{(vii)} && U_{CNOT}(X \otimes X)U_{CNOT},\\
&\text{(viii)} && U_{CNOT}(Z \otimes Z)U_{CNOT},\\
&\text{(ix)} && U_{CNOT}U_{CNOT},
\end{aligned}
$$

где

$$
I_2 := |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, \quad X := |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|, \quad Y := |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|,
$$
$$
Z := |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|, \quad U_{CNOT} := |0\rangle\langle 0| \otimes I_2 + |1\rangle\langle 1| \otimes X\,.
$$

Решение 1. Непосредственное вычисление дает

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && XZ = -Y \\
&\text{(ii)} && ZX = Y \\
&\text{(iii)} && U_{CNOT}(X \otimes I_2)U_{CNOT} = X \otimes X \\
&\text{(iv)} && U_{CNOT}(I_2 \otimes X)U_{CNOT} = I_2 \otimes X \\
&\text{(v)} && U_{CNOT}(Z \otimes I_2)U_{CNOT} = Z \otimes I_2 \\
&\text{(vi)} && U_{CNOT}(I_2 \otimes Z)U_{CNOT} = Z \otimes Z \\
&\text{(vii)} && U_{CNOT}(X \otimes X)U_{CNOT} = X \otimes I_2 \\
&\text{(viii)} && U_{CNOT}(Z \otimes Z)U_{CNOT} = I_2 \otimes Z \\
&\text{(ix)} && U_{CNOT}U_{CNOT} = I_2 \otimes I_2.
\end{aligned}
$$

Задача 2. Предположим, что все те ошибки, которые могут произойти с тремя кубитами, описываются с помощью набора унитарных матриц

$$\{I_2 \otimes I_2 \otimes I_2, I_2 \otimes U_{NOT} \otimes U_{NOT}, I_2 \otimes U_P \otimes U_P, I_2 \otimes (U_P U_{NOT}) \otimes (U_P U_{NOT})\},$$

где

$$U_P := |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|, \quad U_{NOT} := |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|.$$

Линейная комбинация этих унитарных матриц имеет вид

$$
\begin{aligned}
E := {} & \alpha I_2 \otimes I_2 \otimes I_2 + \beta I_2 \otimes U_{NOT} \otimes U_{NOT} + \delta I_2 \otimes U_P \otimes U_P \\
& + \gamma I_2 \otimes (U_P U_{NOT}) \otimes (U_P U_{NOT}),
\end{aligned}
$$

где α, β, δ, $\gamma \in \mathbf{C}$. Описать, как можно исправить произвольную ошибку E на трехкубитовом состоянии

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \otimes |\psi\rangle,$$

чтобы получить правильное значение $|\psi\rangle$, используя последний кубит, где

$$|\psi\rangle := a|0\rangle + b|1\rangle, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad a, b \in \mathbf{C}.$$

Решение 2. Действуя матрицей

$$
\begin{aligned}
& \alpha I_2 \otimes I_2 \otimes I_2 + \beta I_2 \otimes U_{NOT} \otimes U_{NOT} \\
& \qquad + \delta I_2 \otimes U_P \otimes U_P + \gamma I_2 \otimes (U_P U_{NOT}) \otimes (U_P U_{NOT})
\end{aligned}
$$

на состояние

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \otimes |\psi\rangle,$$

получим состояние

$$\begin{aligned}
&\alpha\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \otimes |\psi\rangle \\
&+ \beta\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \otimes (a|1\rangle + b|0\rangle) \\
&+ \delta\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \otimes (a|0\rangle - b|1\rangle) \\
&+ \gamma\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \otimes (a|1\rangle - b|0\rangle).
\end{aligned}$$

Таким образом, чтобы получить $|\psi\rangle$, проводится измерение первых двух кубит в базисе Белла и к последнему кубиту применяется соответствующее преобразование.

измерение	преобразование
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 00\rangle + \lvert 11\rangle)$	I_2
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 01\rangle + \lvert 10\rangle)$	U_{NOT}
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 00\rangle - \lvert 11\rangle)$	U_P
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 01\rangle - \lvert 10\rangle)$	$U_{NOT}U_P$

Задача 3. Предположим, что единственные ошибки, которые могут случиться в системе кубитов — это ошибки, происходящие с отдельными кубитами, т. е. ошибка в одном состоянии кубита не зависит от ошибки в другом состоянии кубита. Следовательно, ошибка для каждого кубита может быть выражена как линейный оператор E на гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^2$. Кроме того, оператор E может быть выражен как линейная комбинация спиновых матриц Паули σ_x, σ_y и σ_z. Рассмотрим теперь несингулярный n-кубитовый код, представляющий одно состояние кубита, который может исправлять ошибки вплоть до k кубитов.

(i) Найти нижнюю границу, описывающую n.

(ii) Найти нижнюю границу при $k = 1$.

Подсказка: n-кубитовые состояния, представляющие кубиты с ошибками, должны отличаться (быть ортогональными) для различных ошибок и отличаться от случая, когда ошибок нет.

Решение 3. (i) Имеется 3 различные ошибки для одного кубита, описываемого матрицами Паули. Таким образом, существует

$$3^l \binom{n}{l} \equiv 3^l \frac{n!}{l!(n-l)!}$$

различных ошибок в l кубитах из n кубитов. Общее число способов получить самое большее k ошибок в n кубитах определяется по формуле

$$\sum_{l=0}^{k} 3^l \binom{n}{l}.$$

Существует 2^n ортогональных состояний в гильбертовом пространстве, описывающих n кубитов. Поскольку состояния, представляющие кубиты ($|0\rangle$ или $|1\rangle$) с разными ошибками, должны быть ортогональны, получим

$$2\sum_{l=0}^{k} 3^l \binom{n}{l} \leqslant 2^n.$$

(ii) В случае $k = 1$ получим оценку

$$2(1 + 3n) \leqslant 2^n.$$

То есть при $k = 1$ имеем $n \geqslant 5$.

Глава 13

Квантовая криптография

Криптография обычно оперирует ключом или ключами, которые используются в алгоритмах шифрования и дешифрования. Квантовая криптография главным образом связана с надежной пересылкой ключей в каналах квантовой связи. Другое приложение криптографии — сокрытие классических данных в квантовых состояниях.

Задача 1. Обозначим через

$$B_1 := \{\ |\psi_0\rangle := |H\rangle,\ |\psi_1\rangle := |V\rangle\ \}$$

ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^2$. Состояния $|H\rangle$ и $|V\rangle$ могут быть определены с помощью горизонтальной и вертикальной поляризации фотона. Через

$$B_2 := \left\{\ |\phi_0\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle), |\phi_1\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle)\ \right\}$$

обозначим второй ортонормированный базис в $\mathbf{C}^2$. Эти состояния определяются с помощью поляризации фотона 45° и -45°. Алиса посылает фотоны, находящиеся случайным образом в одном из четырех состояний $|H\rangle$, $|V\rangle$, $|\phi_0\rangle$ и $|\phi_1\rangle$ Бобу. Боб затем случайным образом выбирает базис B_1 или B_2 чтобы измерить поляризацию фотона. Все случайные решения принимаются согласно закону равномерного распределения. Алиса и Боб интерпретируют $|\psi_0\rangle$ как бинарный 0, и $|\psi_1\rangle$ как бинарную 1 в базисе B_1. Они интерпретируют $|\phi_0\rangle$ как бинарный 0, и $|\phi_1\rangle$ как бинарную 1 в базисе B_2.

(i) Какова вероятность того, что Боб измеряет фотон в состоянии, заданном Алисой, т. е. какова вероятность того, что бинарные интерпретации Алисы и Боба одинаковы?

(ii) Некое устройство подслушивания (назовем его Евой) перехватывает фотоны, посланные Бобу, и затем пересылает фотон Бобу. Это устройство также определяет поляризацию фотона в одном из базисов B_1 или B_2, перед пересылкой. Какова вероятность того, что бинарная интерпретация Евы тождественна интерпретации Алисы и Боба?

Решение 1. (i) Вероятность того, что Алиса подготавливает состояние из базиса B_1 равна $\frac{1}{2}$, и из базиса B_2 также $\frac{1}{2}$. Аналогично вероятности того, что Боб выбирает для измерения базис B_1 и B_2, равны $\frac{1}{2}$. Таким образом, вероятность того, что Алиса и Боб проводят измерения в одном и том же базисе, равна $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Чтобы определить корреляции в бинарной интерпретации, рассмотрим два случая: (a) Алиса и Боб используют один и тот же базис и (b) Алиса и Боб используют разные базисы. Случаи (a) и (b) могут произойти с равной вероятностью $\frac{1}{2}$. В случае (a) бинарные интерпретации Алисы и Боба совпадают. В случае (b) заметим, что

$$|\langle\psi_0|\phi_0\rangle|^2 = |\langle\psi_0|\phi_1\rangle|^2 = |\langle\psi_1|\phi_0\rangle|^2 = |\langle\psi_1|\phi_1\rangle|^2 = \frac{1}{2}.$$

Другими словами, если Боб использует неверный базис, он получает правильную бинарную интерпретацию с вероятностью $\frac{1}{2}$. Следовательно, полная вероятность того, что бинарные интерпретации Алисы и Боба совпадают, равна

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, для 75% фотонов, посланных Алисой, бинарные интерпретации Алисы и Боба совпадают.

(ii) С учетом результатов пункта (i) каждая из вероятностей того, что соответственно Алиса и Ева, Ева и Боб, и также Алиса и Боб проводят измерение в одном и том же базисе, равна $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Также из (i) следует, что, если Алиса и Ева работают в одном и том же базисе, шансы Боба на получение правильного результата равны 75%, т. к. Ева не возмущает состояние фотона. Аналогично, если Боб и Ева работают в одном и том же базисе, шансы Боба на получение правильного результата равны 75%, т.к. Боб не возмущает состояние фотона после того, как Ева пересылает его. Теперь рассмотрим случай, когда Ева использует базис, отличный от базиса Алисы и Боба. Предположим, Алиса посылает $|\psi_0\rangle$ из B_1, и Ева проводит измерение в базисе B_2. В итоге Ева получит $|\phi_0\rangle$ или $|\phi_1\rangle$ с одинаковой вероятностью $\frac{1}{2}$. После этого Боб проводит измерение в базисе B_1 и получает $|\psi_0\rangle$ с вероятностью $\frac{1}{2}$ или $|\psi_1\rangle$ с вероятностью $\frac{1}{2}$. Таким образом, можно построить следующую таблицу, где P_1 — вероятность того, что Ева получает бинарную интерпретацию состояния Алисы правильно, и P_2 — вероятность того, что Боб получает бинарную интерпретацию состояния Алисы правильно.

базис Алисы	базис Евы	базис Боба	P_1	P_2
B_1	B_1	B_1	1	1
B_1	B_1	B_2	1	1/2
B_1	B_2	B_1	1/2	1/2
B_1	B_2	B_2	1/2	1/2
B_2	B_1	B_1	1/2	1/2
B_2	B_1	B_2	1/2	1/2
B_2	B_2	B_1	1	1/2
B_2	B_2	B_2	1	1

Полная вероятность того, что бинарная интерпретация Боба соответствует бинарной интерпретации Алисы, равна

$$\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)=\frac{5}{8},$$

т. е. 62.5%.

Задача 2. (i) Рассмотрим двухкубитовое синглетное состояние в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^4$

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle-|10\rangle)\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\otimes|1\rangle-|1\rangle\otimes|0\rangle).$$

Пусть U — унитарная матрица 2×2 с определителем $\det(U)=1$. Найти

$$(U\otimes U)|\psi\rangle.$$

(ii) Рассмотрим состояние

$$|\psi\rangle=\frac{1}{2\sqrt{3}}(2|0011\rangle-|0101\rangle-|0110\rangle-|1001\rangle-|1010\rangle+2|1100\rangle)$$

в гильбертовом пространстве $\mathbf{C}^{16}$. Это состояние является расширением двухкубитового синглетного состояния, определенного в (i). Вычислить

$$(U \otimes U \otimes U \otimes U)|\psi\rangle.$$

(iii) Состояние, определенное в (i) и (ii), может быть расширено на произвольное N (N — четное) следующим образом:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{(N/2)!\sqrt{N/2+1}} \sum_{\substack{\text{перестановки} \\ 0\ldots01\ldots1}} p!\left(\frac{N}{2}-p\right)!(-1)^{N/2-p}|j_1 j_2 \ldots j_N\rangle,$$

где сумма распространяется на все состояния, полученные перестановкой состояния

$$|0\ldots01\ldots1\rangle \equiv |0\rangle \otimes \ldots \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes \ldots \otimes |1\rangle,$$

которое содержит одинаковое число нулей и единиц, и p — число нулей в первых $N/2$ позициях. Таким образом, это состояние является синглетным. Введем

$$U^{\otimes N} \equiv U \otimes \ldots \otimes U, \qquad N \text{ — число раз.}$$

Найти

$$U^{\otimes N}|\psi\rangle\,.$$

Решение 2. (i) Унитарное преобразование для матриц 2×2 определяется с помощью соотношения

$$|0\rangle \to a|0\rangle + b|1\rangle,$$
$$|1\rangle \to c|0\rangle + d|1\rangle,$$

где

$$ad - bc = e^{i\phi}, \qquad \phi \in \mathbf{R}.$$

Получим

$$(U \otimes U)|\psi\rangle = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle).$$

При $\phi = 0$ (поскольку $\det(U) = 1$)

$$(U \otimes U)|\psi\rangle = |\psi\rangle.$$

(ii) Используя результаты (i) и $\det(U) = 1$, получим

$$(U \otimes U \otimes U \otimes U)|\psi\rangle = |\psi\rangle.$$

(iii) Используя результаты (i), вычисляем

$$U^{\otimes N}|\psi\rangle = |\psi\rangle\,.$$

Состояние $|\psi\rangle$, определенное в (iii), может быть использовано для пересылки криптографических ключей, кодирования квантовой информации в подпространствах, свободных от декогерентизации, разделения секретной информации между несколькими лицами, телеклонирования квантовых состояний, и также для решения задачи об обнаружении лжеца и задачи византийских генералов.

Часть II

Бесконечномерные гильбертовы пространства

Глава 14

Гармонический осциллятор и бозе-операторы

Наряду с квантовыми вычислениями и квантовыми алгоритмами на основе кубитов, в квантовой теории информации находят применение и используются в таких областях, как квантовая телепортация и квантовая криптография, и непрерывные переменные. В непрерывных системах центральную роль играют бозе-операторы.

Задача 1. Рассмотрим гамильтониан для одномерного *гармонического осциллятора*

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\widehat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\widehat{q}^2,$$

введем *характеристическую длину*

$$\ell_0 := \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

и определим безразмерные линейные операторы (бозе-операторы)

$$b := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\widehat{q}}{\ell_0} + i\frac{\widehat{p}}{\hbar/\ell_0}\right), \qquad b^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\widehat{q}}{\ell_0} - i\frac{\widehat{p}}{\hbar/\ell_0}\right).$$

(i) Найти $[b, b^\dagger]$.

(ii) Выразить $\widehat{q}$ и $\widehat{p}$ через b и $b^\dagger$.

(iii) Выразить $\widehat{H}$ через b и $b^\dagger$.

Решение 1. (i) Поскольку

$$\widehat{p} := -i\hbar\frac{\partial}{\partial q},$$

получим

$$[b, b^\dagger] = I,$$

где I — тождественный оператор.

(ii) Получим

$$\widehat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ell_0(b + b^\dagger), \qquad \widehat{p} = \frac{\hbar/\ell_0}{\sqrt{2}i}(b - b^\dagger).$$

(iii) Находим

$$\widehat{H} = \hbar\omega(b^\dagger b + \frac{1}{2}I).$$

Задача 2. Рассмотрим гамильтониан одномерного *гармонического осциллятора* в виде ($\hbar = 1, m = 1, \omega = 1$)

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\widehat{p}^2 + \frac{1}{2}\widehat{q}^2$$

и

$$U := e^{i\widehat{H}\pi/4}.$$

Найти

$$U\begin{pmatrix}\widehat{p}\\ \widehat{q}\end{pmatrix}U^\dagger \equiv \begin{pmatrix}U\widehat{p}U^\dagger\\ U\widehat{q}U^\dagger\end{pmatrix}.$$

Решение 2. Из соотношения $\widehat{p} = -i\dfrac{\partial}{\partial q}$ и $[\widehat{p}, \widehat{q}] = -iI$ следует, что

$$\begin{aligned}
[\widehat{H}, \widehat{q}] &= -i\widehat{p},\\
[\widehat{H}, \widehat{p}] &= i\widehat{q},\\
[\widehat{H}, [\widehat{H}, \widehat{q}]] &= \widehat{q},\\
[\widehat{H}, [\widehat{H}, \widehat{p}]] &= \widehat{p}.
\end{aligned}$$

Используя полученный результат и разложения

$$U\widehat{p}U^\dagger = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(i\frac{\pi}{4}\right)^j}{j!}\overbrace{[\widehat{H}, [\widehat{H}, \ldots, [\widehat{H}}^{j\ \text{раз}}, \widehat{p}]\ldots]],$$

$$U\widehat{q}U^\dagger = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(i\frac{\pi}{4}\right)^j}{j!}\overbrace{[\widehat{H}, [\widehat{H}, \ldots, [\widehat{H}}^{j\ \text{раз}}, \widehat{q}]\ldots]],$$

получим

$$U \begin{pmatrix} \widehat{p} \\ \widehat{q} \end{pmatrix} U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \widehat{p} - \widehat{q} \\ \widehat{p} + \widehat{q} \end{pmatrix},$$

т. е. унитарный оператор U является *преобразованием Уолша–Адамара*.

Задача 3. Бозе-операторы рождения $b^\dagger$ и уничтожения b удовлетворяют *алгебре Гейзенберга* (*коммутационным соотношениям*)

$$[b, b^\dagger] = I,$$

$$[b, b] = [b^\dagger, b^\dagger] = 0$$

и

$$b|0\rangle = 0,$$

где $|0\rangle$ — *вакуумное состояние* с $\langle 0|0\rangle = 1$.

(i) Вычислить

$$[b^2, b^\dagger b], \qquad [b^2, b^{\dagger 2}].$$

(ii) Вычислить

$$bbb^\dagger b^\dagger|0\rangle.$$

(iii) Введем состояние

$$|n\rangle := \frac{1}{\sqrt{n!}}(b^\dagger)^n|0\rangle$$

— *состояние с определенным числом частиц* (*состояние, заданное в представлении Фока*). Найти

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|.$$

Решение 3. (i) Используя коммутационные соотношения, получим

$$[b^2, b^\dagger b] = 2b^2, \qquad [b^2, b^{\dagger 2}] = 2I + 4b^\dagger b.$$

(ii) Используя коммутационные соотношения, находим

$$bbb^\dagger b^\dagger|0\rangle = 2|0\rangle.$$

(iii) Очевидно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = I,$$

где I — тождественный оператор. Это соотношение называется *соотношением полноты*.

Задача 4. Введем *оператор числа частиц*

$$\widehat{n} := b^\dagger b.$$

Вычислить коммутаторы

$$[\widehat{n}, b], \quad [\widehat{n}, [\widehat{n}, b]], \quad [\widehat{n}, [\widehat{n}, [\widehat{n}, b]]].$$

Рассмотреть общий случай m коммутаторов.

Решение 4. Вычисляя, получим

$$[\widehat{n}, b] = -b, \quad [\widehat{n}, [\widehat{n}, b]] = (-1)^2 b, \quad [\widehat{n}, [\widehat{n}, [\widehat{n}, b]]] = (-1)^3 b.$$

Очевидно, в общем случае m коммутаторов получим $(-1)^m b$.

Задача 5. Пусть $\epsilon \in \mathbf{R}$ и $\epsilon > 0$. Вычислить *след*

$$\mathrm{tr}(b^\dagger b e^{-\epsilon b^\dagger b}),$$

который определяется с помощью соотношения

$$\mathrm{tr}(b^\dagger b e^{-\epsilon b^\dagger b}) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n| b^\dagger b e^{-\epsilon b^\dagger b} |n\rangle,$$

где $\{|n\rangle : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ — состояния с определенным числом частиц (фоковские состояния).

Решение 5. Поскольку

$$\langle n| b^\dagger b = \langle n| n$$

и

$$e^{-\epsilon b^\dagger b} |n\rangle = e^{-\epsilon n} |n\rangle,$$

получим

$$\operatorname{tr}(b^\dagger b e^{-\epsilon b^\dagger b}) = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\epsilon n} = \frac{e^\epsilon}{(e^\epsilon - 1)^2}.$$

Задача 6. Пусть b и $b^\dagger$ — бозе-операторы уничтожения и рождения соответственно. Рассмотрим общее одномодовое каноническое *преобразование Боголюбова*

$$\widetilde{b} := e^{i\phi}\operatorname{ch}(r) b + e^{i\psi}\operatorname{sh}(r) b^\dagger,$$
$$\widetilde{b}^\dagger := e^{-i\phi}\operatorname{ch}(r) b^\dagger + e^{-i\psi}\operatorname{sh}(r) b,$$

где r — вещественный параметр (*параметр сжатия*).

(i) Показать, что операторы $\widetilde{b}$ и $\widetilde{b}^\dagger$ удовлетворяют коммутационным соотношениям Бозе.

(ii) Найти обратное преобразование Боголюбова.

Решение 6. (i) Поскольку

$$\operatorname{ch}^2(r) - \operatorname{sh}^2(r) = 1,$$

получим

$$[\widetilde{b}, \widetilde{b}^\dagger] = bb^\dagger - b^\dagger b = I.$$

(ii) Преобразование может быть записано в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \widetilde{b} \\ \widetilde{b}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\phi}\operatorname{ch}(r) & e^{i\psi}\operatorname{sh}(r) \\ e^{-i\psi}\operatorname{sh}(r) & e^{-i\phi}\operatorname{ch}(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b^\dagger \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен $+1$. Обратное преобразование имеет вид

$$\begin{pmatrix} b \\ b^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi}\operatorname{ch}(r) & -e^{i\psi}\operatorname{sh}(r) \\ -e^{-i\psi}\operatorname{sh}(r) & e^{i\phi}\operatorname{ch}(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{b} \\ \widetilde{b}^\dagger \end{pmatrix}.$$

Задача 7. Пусть $\epsilon \in \mathbf{R}$ и $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ — *целая аналитическая функция*. Если функция f аналитична на всей комплексной плоскости, то говорят, что f является целой. Показать, что

$$e^{\epsilon b} f(b, b^\dagger) e^{-\epsilon b} = f(b, b^\dagger + \epsilon I), \tag{1a}$$

$$e^{-\epsilon b^\dagger} f(b, b^\dagger) e^{\epsilon b^\dagger} = f(b + \epsilon I, b^\dagger). \tag{1b}$$

Решение 7. Очевидно:

$$e^{\epsilon b} f(b, b^\dagger) e^{-\epsilon b} = f(e^{\epsilon b} b e^{-\epsilon b}, e^{\epsilon b} b^\dagger e^{-\epsilon b}) = f(b, e^{\epsilon b} b^\dagger e^{-\epsilon b}).$$

Поскольку

$$e^{\epsilon b} b^\dagger e^{-\epsilon b} = b^\dagger + \epsilon I$$

и $[b, b^\dagger] = I$, сразу же получаем равенство (1a). Аналогичное доказательство верно и для (1b).

Задача 8. Пусть $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ — целая аналитическая функция. Показать, что

$$f(b^\dagger b) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) |n\rangle\langle n|,$$

где $|n\rangle$ — состояние с определенным числом частиц (фоковское состояние).

Решение 8. Соотношение полноты имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = I.$$

Поскольку $b^\dagger b|n\rangle = n|n\rangle$, получим

$$f(b^\dagger b)|n\rangle = f(n)|n\rangle.$$

Отсюда следует, что

$$f(b^\dagger b) = f(b^\dagger b) I = f(b^\dagger b) \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} f(b^\dagger b)|n\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)|n\rangle\langle n|.$$

Задача 9. Пусть $\{|n\rangle : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ — состояния с определенным числом частиц (фоковские состояния). Введем линейные операторы

$$\widehat{E} := \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1|, \quad \widehat{E}^\dagger := \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n|.$$

Очевидно, что $\widehat{E}^\dagger$ получается из $\widehat{E}$.

(i) Найти $\widehat{E}\widehat{E}^\dagger$ и $\widehat{E}^\dagger\widehat{E}$.

(ii) Пусть f — аналитическая функция. Вычислить $\widehat{E}f(\widehat{n})\widehat{E}^\dagger$ и $\widehat{E}^\dagger f(\widehat{n}+I)\widehat{E}$, где $\widehat{n}$ — оператор числа фотонов, и I — тождественный оператор.

Решение 9. (i) Используя соотношение $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$ и соотношение полноты, найдем

$$\begin{aligned}\widehat{E}\widehat{E}^\dagger &= \sum_{m=0}^{\infty}|m\rangle\langle m+1|\sum_{n=0}^{\infty}|n+1\rangle\langle n| \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|m\rangle\delta_{m+1,n+1}\langle n| \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}|m\rangle\langle m| = I.\end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\widehat{E}^\dagger\widehat{E} = I - |0\rangle\langle 0|.$$

(ii) Разлагая аналитическую функцию в ряд Тейлора в окрестности 0, получим

$$\widehat{E}f(\widehat{n}) = \sum_{m=0}^{\infty}|m\rangle\langle m+1|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\widehat{n}^j.$$

Применяя

$$\widehat{n}|m\rangle = m|m\rangle,$$

$$\widehat{n}^j|m\rangle = m^j|m\rangle$$

и

$$(\widehat{n}+I)|m\rangle = (m+1)|m\rangle, \quad (\widehat{n}+I)^j|m\rangle = (m+1)^j|m\rangle,$$

получаем

$$\widehat{E}f(\widehat{n}) = f(\widehat{n}+I)\widehat{E}.$$

Таким образом,

$$\widehat{E}f(\widehat{n})\widehat{E}^\dagger = f(\widehat{n}+I).$$

Аналогично

$$\widehat{E}^\dagger f(\widehat{n}+I)\widehat{E} = f(\widehat{n}).$$

Задача 10. Рассмотрим *канонические фазовые состояния Сусскайнда–Глоговера (Susskind–Glogower)*

$$|\phi\rangle := \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\phi n}|n\rangle,$$

где $|n\rangle$ — состояние с определенным числом частиц. Пусть

$$\widehat{L} := \sum_{n=1}^{\infty} |n-1\rangle\langle n|$$

— неунитарный оператор, понижающий число частиц. Найти $\widehat{L}|\phi\rangle$.

Решение 10. Поскольку $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$, получим

$$\widehat{L}|\phi\rangle = e^{i\phi}|\phi\rangle.$$

Это означает, что $|\phi\rangle$ — собственное состояние оператора $\widehat{L}$.

Задача 11. Пусть $b^\dagger$ и b — бозе-операторы рождения и уничтожения соответственно. Рассмотрим оператор

$$e^{\alpha_1 b^2 + \alpha_2 (b^\dagger)^2 + \alpha_3 (bb^\dagger + b^\dagger b)}, \tag{1}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{R}$. Пусть $\epsilon \in \mathbf{R}$ — произвольный вещественный параметр. Найти гладкие функции f_0, f_1, f_2 и f_3, зависящие от ϵ, такие, что

$$e^{\epsilon(\alpha_1 b^2 + \alpha_2 (b^\dagger)^2 + \alpha_3 (bb^\dagger + b^\dagger b))} = e^{f_0(\epsilon)I + f_1(\epsilon)(b^\dagger)^2} e^{f_2(\epsilon) b^\dagger b} e^{f_3(\epsilon) b^2}, \tag{2}$$

где I — тождественный оператор. Затем положить $\epsilon = 1$.

Решение 11. Решаем эту задачу, используя *дифференцирование по параметру* ϵ. Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций f_0, f_1, f_2 и f_3. Дифференцируя (2) по ϵ, получим

$$(\alpha_1 b^2 + \alpha_2 (b^\dagger)^2 + \alpha_3 (bb^\dagger + b^\dagger b)) e^{\epsilon(\alpha_1 b^2 + \alpha_2 (b^\dagger)^2 + \alpha_3 (bb^\dagger + b^\dagger b))}$$

$$\begin{aligned} &= e^{f_0(\epsilon)I + f_1(\epsilon)(b^\dagger)^2} \left(\frac{df_0}{d\epsilon} I + \frac{df_1}{d\epsilon} (b^\dagger)^2 \right) e^{f_2(\epsilon) b^\dagger b} e^{f_3(\epsilon) b^2} \\ &\quad + e^{f_0(\epsilon)I + f_1(\epsilon)(b^\dagger)^2} e^{f_2(\epsilon) b^\dagger b} \left(\frac{df_2}{d\epsilon} b^\dagger b \right) e^{f_3(\epsilon) b^2} \\ &\quad + e^{f_0(\epsilon)I + f_1(\epsilon)(b^\dagger)^2} e^{f_2(\epsilon) b^\dagger b} e^{f_3(\epsilon) b^2} \left(\frac{df_3}{d\epsilon} b^2 \right). \end{aligned} \tag{3}$$

Благодаря тождеству $e^{\epsilon \widehat{X}} e^{-\epsilon \widehat{X}} = I$, имеем

$$e^{-\epsilon(\alpha_1 b^2 + \alpha_2 (b^\dagger)^2 + \alpha_3 (bb^\dagger + b^\dagger b))} = e^{-f_3(\epsilon) b^2} e^{-f_2(\epsilon) b^\dagger b} e^{-f_0(\epsilon) I - f_1(\epsilon)(b^\dagger)^2}. \tag{4}$$

Умножая левые части соотношений (3) и (4), и также правые части соотношений (3) и (4), получим

$$\begin{aligned} (\alpha_1 b^2 + \alpha_2 (b^\dagger)^2 + \alpha_3 (bb^\dagger + b^\dagger b)) &= \frac{df_0}{d\epsilon} I + \frac{df_1}{d\epsilon} e^{-f_3(\epsilon) b^2} e^{-f_2(\epsilon) b^\dagger b} (b^\dagger)^2 \\ &\times e^{f_2(\epsilon) b^\dagger b} e^{f_3(\epsilon) b^2} + \frac{df_2}{d\epsilon} e^{-f_3(\epsilon) b^2} b^\dagger b e^{f_3(\epsilon) b^2} + \frac{df_3}{d\epsilon} b^2. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} e^{-f_2(\epsilon) b^\dagger b} (b^\dagger)^2 e^{f_2(\epsilon) b^\dagger b} &= (b^\dagger)^2 e^{-2 f_2(\epsilon)}, \\ e^{-f_3(\epsilon) b^2} (b^\dagger)^2 e^{f_3(\epsilon) b^2} &= (b^\dagger)^2 + 4 f_3^2(\epsilon) b^2 - 2 f_3(\epsilon)(I + 2 b^\dagger b), \\ e^{-f_3(\epsilon) b^2} b^\dagger b e^{f_3(\epsilon) b^2} &= b^\dagger b - 2 f_3(\epsilon) b^2, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} &\alpha_1 b^2 + \alpha_2 (b^\dagger)^2 + 2\alpha_3 b^\dagger b + \alpha_3 I \\ &= \frac{df_0}{d\epsilon} I + \frac{df_1}{d\epsilon} e^{-2 f_2} ((b^\dagger)^2 + 4 f_3^2 b^2 - f_3 (2I + 4 b^\dagger b)) + \frac{df_2}{d\epsilon} (b^\dagger b - 2 f_3 b^2) + \frac{df_3}{d\epsilon} b^2. \end{aligned}$$

Здесь использовался тот факт, что

$$e^{-\mu \widehat{A}} \widehat{B} e^{\mu \widehat{A}} = \widehat{B} - \mu [\widehat{A}, \widehat{B}] + \frac{1}{2!} \mu^2 [\widehat{A}, [\widehat{A}, \widehat{B}]] + \cdots$$

и $bb^\dagger = I + b^\dagger b$. Группируя слагаемые, содержащие I, b^2, $(b^\dagger)^2$ и $b^\dagger b$, получим

$$\begin{aligned}
\frac{df_0}{d\epsilon} - \alpha_3 - 2f_3\frac{df_1}{d\epsilon}e^{-2f_2} &= 0,\\
4f_3^2\frac{df_1}{d\epsilon}e^{-2f_2} + \frac{df_3}{d\epsilon} - 2\frac{df_2}{d\epsilon}f_3 - \alpha_1 &= 0,\\
\frac{df_1}{d\epsilon} - \alpha_2 e^{2f_2} &= 0,\\
4\frac{df_1}{d\epsilon}f_3 e^{-2f_2} - \frac{df_2}{d\epsilon} + 2\alpha_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Используя эту систему, запишем систему дифференциальных уравнений в виде

$$\frac{df_0}{d\epsilon} = \alpha_3 + 2\alpha_2 f_3, \tag{5a}$$

$$\frac{df_1}{d\epsilon} = \alpha_2 e^{2f_2}, \tag{5b}$$

$$\frac{df_2}{d\epsilon} = 2\alpha_3 + 4\alpha_2 f_3, \tag{5c}$$

$$\frac{df_3}{d\epsilon} = \alpha_1 + 4\alpha_3 f_3 + 4\alpha_2 f_3^2 \tag{5d}$$

с начальными условиями $f_j(0) = 0$ при $j = 0, 1, 2, 3$. Сначала решим уравнение (5d), которое является *уравнением Риккати*, и затем подставим решение в (5c) и (5b) и выразим f_2 и f_0. Наконец, разрешаем уравнение относительно f_1. После интегрирования получим

$$\begin{aligned}
f_0(\epsilon) &= \frac{1}{2}\ln(\operatorname{ch}(2\lambda\epsilon) - (\alpha_3/\lambda)\operatorname{sh}(2\lambda\epsilon)),\\
f_1(\epsilon) &= \frac{(\alpha_2/2\lambda)\operatorname{sh}(2\lambda\epsilon)}{\operatorname{ch}(2\lambda\epsilon) - (\alpha_3/\lambda)\operatorname{sh}(2\lambda\epsilon)},\\
f_2(\epsilon) &= -\ln(\operatorname{ch}(2\lambda\epsilon) - (\alpha_3/\lambda)\operatorname{sh}(2\lambda\epsilon)),\\
f_3(\epsilon) &= \frac{(\alpha_1/2\lambda)\operatorname{sh}(2\lambda\epsilon)}{\operatorname{ch}(2\lambda\epsilon) - (\alpha_3/\lambda)\operatorname{sh}(2\lambda\epsilon)},
\end{aligned}$$

где $\lambda := \sqrt{\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2}$. Подставляя $\epsilon = 1$, получим

$$\begin{aligned} e^{\alpha_1 b^2 + \alpha_2 (b^\dagger)^2 + \alpha_3 (bb^\dagger + b^\dagger b)} &= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}(2\lambda) - (\alpha_3/\lambda)\operatorname{sh}(2\lambda)}} \\ &\quad \times \exp\left(\frac{(\alpha_2/\lambda)\operatorname{sh}(2\lambda)}{\operatorname{ch}(2\lambda) - (\alpha_3/\lambda)\operatorname{sh}(2\lambda)}(b^\dagger)^2\right) \\ &\quad \times \exp(\ln(\operatorname{ch}(2\lambda) - (\alpha_3/\lambda)\operatorname{sh}(2\lambda))^{-1} b^\dagger b) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{(\alpha_1/2\lambda)\operatorname{sh}(2\lambda)}{\operatorname{ch}(2\lambda) - (\alpha_3/\lambda)\operatorname{sh}(2\lambda)} b^2\right). \end{aligned}$$

Задача 12. Пусть f — аналитическая функция по x и y, а $b^\dagger$ и b — бозе-операторы рождения и уничтожения соответственно. Определим величину $f(b, b^\dagger)$ с помощью разложения в степенной ряд

$$f(b, b^\dagger) := \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_n=0}^{\infty} f(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)(b^\dagger)^{j_1} b^{j_2} (b^\dagger)^{j_3} \ldots b^{j_n}.$$

Используя повторно коммутационное соотношение для бозе-операторов, операторы b, $b^\dagger$ перегруппируем так, что

$$f(b, b^\dagger) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}^{(n)} (b^\dagger)^m b^n.$$

Говорят, что функция $f(b, b^\dagger)$ приведена к *нормальной форме*.

(i) Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} f(b, b^\dagger) &= b^\dagger b b^\dagger b, \\ g(b, b^\dagger) &= b^\dagger b b^\dagger b b^\dagger b. \end{aligned}$$

Найти нормальную форму для этих функций.

(ii) Рассмотрим функцию

$$e^{-\epsilon b^\dagger b},$$

где ϵ — вещественный положительный параметр. Найти нормальную форму.

Решение 12. (i) Из коммутационных соотношений для бозе-операторов следует, что

$$bb^\dagger = I + b^\dagger b.$$

Таким образом,

$$f(b, b^\dagger) = b^\dagger b + b^\dagger b^\dagger bb$$

и

$$g(b, b^\dagger) = b^\dagger b^\dagger b^\dagger bbb + 3b^\dagger b^\dagger bb + b^\dagger b.$$

(ii) Используя результаты пункта (i), получим

$$e^{-\epsilon b^\dagger b} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(e^{-\epsilon} - 1)^j (b^\dagger)^j b^j.$$

Задача 13. Однородное *преобразование Боголюбова* бозе-операторов рождения $b^\dagger$ и уничтожения b

$$\widetilde{b} = \mu b + \nu b^\dagger, \qquad \mu, \nu \in \mathbf{C},$$

для пары комплексных параметров

$$\mu = |\mu| \exp(i\phi), \qquad \nu = |\nu| \exp(i\theta),$$

удовлетворяющих соотношению

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1,$$

является *каноническим*, поскольку оно оставляет коммутатор инвариантным:

$$[b, b^\dagger] = [\widetilde{b}, \widetilde{b}^\dagger] = I.$$

Всякое каноническое преобразование может быть представлено как унитарное преобразование

$$\widetilde{b} = B(\mu, \nu) b B^\dagger(\mu, \nu).$$

Унитарный оператор Боголюбова $B(\mu, \nu)$ определяется этим соотношением с точностью до произвольного фазового множителя. Одним из возможных вариантов является нормальная форма

$$B(\mu, \nu) = \mu^{-1/2} \exp\left(-\frac{\nu}{2\mu} b^{\dagger 2}\right) \exp\left(-\ln(\mu) b^\dagger b\right) \exp\left(\frac{\nu^*}{2\mu} b^2\right).$$

Показать, что преобразование Боголюбова образует непрерывную некоммутативную группу.

Решение 13. Пусть

$$|\mu'|^2 - |\nu'|^2 = 1, \qquad |\mu''|^2 - |\nu''|^2 = 1.$$

В этом случае

$$B(\mu', \nu')B(\mu'', \nu'') = B(\mu, \nu)$$

и

$$\mu = \mu'\mu'' + \nu'^*\nu'', \qquad \nu = \mu'^*\nu'' + \nu'\mu'',$$

причем $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$. С учетом того что $\ln(1) = 0$, единичный элемент группы равен $B(1, 0)$. Обратный элемент к элементу $B(\mu, \nu)$ определяется формулой

$$B^{-1}(\mu, \nu) = B^\dagger(\mu, \nu) = B(\mu^*, -\nu).$$

Очевидно, ассоциативность также выполнена.

Задача 14. Алгебра Ли $su(1,1)$ определяется с помощью коммутационных соотношений

$$[k_1, k_2] = -ik_3, \qquad [k_3, k_1] = ik_2, \qquad [k_2, k_3] = -ik_1,$$

где k_1, k_2 и k_3 — базисные элементы алгебры Ли. Показать, что бесконечномерное матричное представление имеет вид

$$k_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$k_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -i & 0 & 2i & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2i & 0 & 3i & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -3i & 0 & 4i & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$k_3 = \frac{1}{2}\mathrm{diag}(1, 3, 5, 7, \dots).$$

Решение 14. Непосредственное вычисление дает описанные выше коммутационные соотношения.

Задача 15. *Бозе-операторы рождения* $b_j^\dagger$ и *уничтожения* b_j удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[b_j, b_k^\dagger] = \delta_{jk} I,$$
$$[b_j, b_k] = [b_j^\dagger, b_k^\dagger] = 0, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, N.$$

Пусть $N = 2$. Рассмотрим операторы

$$K_+ := b_1^\dagger b_2^\dagger, \qquad K_- := b_2 b_1, \qquad K_3 := \frac{1}{2}(b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2 + I),$$

где I — тождественный оператор. Найти коммутаторы

$$[K_+, K_-], \quad [K_3, K_+], \quad [K_3, K_-].$$

Операторы K_+, K_-, K_3 образуют представление алгебры Ли $su(1,1)$.

Решение 15. Используя определенные выше коммутационные соотношения, находим

$$\begin{aligned}
[K_+, K_-] &= [b_1^\dagger b_2^\dagger, b_2 b_1] \\
&= b_1^\dagger b_2^\dagger b_2 b_1 - b_2 b_1 b_1^\dagger b_2^\dagger \\
&= b_1^\dagger b_2^\dagger b_2 b_1 - b_2 b_2^\dagger - b_1^\dagger b_1 b_2 b_2^\dagger \\
&= -b_2 b_2^\dagger - b_1^\dagger b_1 = -I - b_2^\dagger b_2 - b_1^\dagger b_1 \\
&= -2K_3.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$[K_+, K_-] = -2K_3.$$

Аналогично

$$[K_3, K_-] = -K_-, \qquad [K_3, K_+] = K_+.$$

Задача 16. Рассмотрим линейные операторы

$$J_+ := b_1^\dagger b_2, \quad J_- := b_2^\dagger b_1, \quad J_3 := \frac{1}{2}(b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2),$$

где $b_1^\dagger, b_2^\dagger$ — бозе-операторы рождения, b_1, b_2 — бозе-операторы уничтожения, и I — тождественный оператор. Найти коммутаторы

$$[J_+, J_-],$$
$$[J_3, J_+],$$
$$[J_3, J_-].$$

Операторы J_+, J_-, J_3 образуют представление алгебры Ли $su(2)$.

Решение 16. Используя коммутационное соотношение, данное выше, находим

$$\begin{aligned}
[J_+, J_-] &= [b_1^\dagger b_2, b_2^\dagger b_1] \\
&= b_1^\dagger b_2 b_2^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_1 b_1^\dagger b_2 \\
&= b_1^\dagger b_2 b_2^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2 - b_2^\dagger b_1^\dagger b_1 b_2 \\
&= -b_2^\dagger b_2 + b_1^\dagger b_1 = 2J_3.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$[J_+, J_-] = 2J_3.$$

Аналогично

$$[J_3, J_-] = -J_-, \qquad [J_3, J_+] = J_+.$$

Задача 17. Предположим, что $b_1^\dagger, b_2^\dagger$ — бозе-операторы рождения, b_1, b_2 — бозе-операторы уничтожения, и I — тождественный оператор. Рассмотрим линейный оператор

$$Z := b \otimes I + I \otimes b^\dagger,$$

где $b_1 := b \otimes I$ и $b_2^\dagger := I \otimes b^\dagger$. Таким образом, $Z = b_1 + b_2^\dagger$. Данный оператор называется *гетеродинным токовым оператором (heterodyne-current operator)*.

(i) Вычислить коммутатор $[Z, Z^\dagger]$.

(ii) Найти состояние

$$Z(|0\rangle \otimes |0\rangle), \qquad Z^\dagger(|0\rangle \otimes |0\rangle).$$

(iii) Найти состояние

$$Z^2(|0\rangle \otimes |0\rangle).$$

Решение 17. (i)

$$\begin{aligned}
Z^\dagger &= b_1^\dagger + b_2 \equiv b^\dagger \otimes I + I \otimes b,\\
[Z, Z^\dagger] &= (b \otimes I + I \otimes b^\dagger)(b^\dagger \otimes I + I \otimes b)\\
&\quad - (b^\dagger \otimes I + I \otimes b)(b \otimes I + I \otimes b^\dagger)\\
&= bb^\dagger \otimes I + b \otimes b + b^\dagger \otimes b^\dagger + I \otimes b^\dagger b\\
&\quad - b^\dagger b \otimes I - b^\dagger \otimes b^\dagger - b \otimes b - I \otimes bb^\dagger\\
&= (bb^\dagger - b^\dagger b) \otimes I + I \otimes (b^\dagger b - bb^\dagger)\\
&= I \otimes I - I \otimes I = 0.
\end{aligned}$$

(ii) Учитывая равенство $b|0\rangle = 0$, получим

$$\begin{aligned}
Z(|0\rangle \otimes |0\rangle) &= (b \otimes I + I \otimes b^\dagger)|0\rangle \otimes |0\rangle\\
&= (b \otimes I)(|0\rangle \otimes |0\rangle) + (I \otimes b^\dagger)(|0\rangle \otimes |0\rangle)\\
&= |0\rangle \otimes b^\dagger|0\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$Z^\dagger|0\rangle \otimes |0\rangle = b^\dagger|0\rangle \otimes |0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle.$$

(iii) Очевидно,

$$Z^2(|0\rangle \otimes |0\rangle) = \sqrt{2}(|0\rangle \otimes |2\rangle).$$

Задача 18. Бозе-операторы рождения $b_1^\dagger, b_2^\dagger$ и уничтожения b_1, b_2 удовлетворяют *алгебре Гейзенберга*

$$[b_j, b_k^\dagger] = \delta_{jk} I,$$
$$[b_j, b_k] = [b_j^\dagger, b_k^\dagger] = 0, \qquad j, k = 1, 2,$$

где $b_1 = b \otimes I$, $b_2 = I \otimes b$ и $b_1|00\rangle = 0$, $b_2|00\rangle = 0$, а $|00\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle$ — вакуумное состояние. Рассмотрим линейное преобразование

$$\begin{aligned}
\widetilde{b}_1 &= u_{11}b_1 + u_{12}b_2 + v_{11}b_1^\dagger + v_{12}b_2^\dagger,\\
\widetilde{b}_2 &= u_{21}b_1 + u_{22}b_2 + v_{21}b_1^\dagger + v_{22}b_2^\dagger,\\
\widetilde{b}_1^\dagger &= v_{11}^*b_1 + v_{12}^*b_2 + u_{11}^*b_1^\dagger + u_{12}^*b_2^\dagger,\\
\widetilde{b}_2^\dagger &= v_{21}^*b_1 + v_{22}^*b_2 + u_{21}^*b_1^\dagger + u_{22}^*b_2^\dagger,
\end{aligned}$$

где $u_{jk}, v_{jk} \in \mathbf{C}$.

(i) Найти условие, при котором операторы $\widetilde{b}_1$, $\widetilde{b}_2$, $\widetilde{b}_1^\dagger$, $\widetilde{b}_2^\dagger$ также удовлетворяют коммутационному соотношению для бозе-операторов.

(ii) Для вакуумного состояния бозе-полей $\widetilde{b}_1$, $\widetilde{b}_2$ справедлива запись

$$|\widetilde{\mathbf{0}}\rangle \equiv |\widetilde{00}\rangle \equiv |\widetilde{0}\rangle \otimes |\widetilde{0}\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}|m\rangle \otimes |n\rangle.$$

Найти рекуррентное соотношение для λ_{mn} из условия

$$\widetilde{b}_1|\widetilde{0}\rangle \otimes |\widetilde{0}\rangle = 0, \qquad \widetilde{b}_2|\widetilde{0}\rangle \otimes |\widetilde{0}\rangle = 0. \tag{1}$$

Решение 18. (i) Из условий

$$[\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2] = 0, \qquad [\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2^\dagger] = 0, \qquad [\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_1^\dagger] = I, \qquad [\widetilde{b}_2, \widetilde{b}_2^\dagger] = I$$

получим

$$u_{11}v_{21} + u_{12}v_{22} - u_{21}v_{11} - u_{22}v_{12} = 0, \tag{2a}$$

$$u_{11}u_{21}^* + u_{12}u_{22}^* - v_{11}v_{21}^* - v_{12}v_{22}^* = 0, \tag{2b}$$

$$u_{11}u_{11}^* + u_{12}u_{12}^* - v_{11}v_{11}^* - v_{12}v_{12}^* = 1, \tag{2c}$$

$$u_{21}u_{21}^* + u_{22}u_{22}^* - v_{21}v_{21}^* - v_{22}v_{22}^* = 1. \tag{2d}$$

(ii) Из условий (1) получим

$$\begin{gathered} c_{(m+1)n}u_{11}\sqrt{m+1} + c_{m(n+1)}u_{12}\sqrt{n+1} \\ + c_{(m-1)n}v_{11}\sqrt{m} + c_{m(n-1)}v_{12}\sqrt{n} = 0 \end{gathered} \tag{3a}$$

и

$$\begin{gathered} c_{(m+1)n}u_{21}\sqrt{m+1} + c_{m(n+1)}u_{22}\sqrt{n+1} \\ + c_{(m-1)n}v_{21}\sqrt{m} + c_{m(n-1)}v_{22}\sqrt{n} = 0. \end{gathered} \tag{3b}$$

Обозначим

$$\Delta_1 := u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}, \quad \Delta_2 := u_{11}v_{21} - u_{21}v_{11}, \quad \Delta_3 := u_{11}v_{22} - u_{21}v_{12},$$
$$\Delta_4 := u_{22}v_{11} - u_{12}v_{21}, \quad \Delta_5 := u_{22}v_{12} - u_{12}v_{22}.$$

После умножения (3a) на u_{21}, (3b) на u_{11} и вычитания получим

$$c_{m(n+1)}\Delta_1\sqrt{n+1} = -c_{(m-1)n}\Delta_2\sqrt{m} - c_{m(n-1)}\Delta_3\sqrt{n}.$$

После умножения (3a) на u_{22}, (3b) на u_{12} и вычитания получим

$$c_{(m+1)n}\Delta_1\sqrt{m+1} = -c_{(m-1)n}\Delta_4\sqrt{m} - c_{m(n-1)}\Delta_5\sqrt{n}.$$

Предполагается, что $\Delta_1 \neq 0$. Из соотношения (2a) видно, что $\Delta_2 = \Delta_5$. Таким образом, получим

$$c_{(2k)(2n+1)} = c_{(2k+1)(2n)} = 0,$$
$$c_{(2k)(2n)} = (-1)^{n+k}\sqrt{(2n)!}\sqrt{(2k)!}$$
$$\times \sum_{\substack{0\leqslant s\leqslant n\\ s\leqslant k}} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^{2s}\left(\frac{\Delta_3}{2\Delta_1}\right)^{n-s}\left(\frac{\Delta_4}{2\Delta_1}\right)^{k-s}\frac{1}{(n-s)!(k-s)!(2s)!}c_0$$

и

$$c_{(2k+1)(2n+1)} = (-1)^{n+k+1}\sqrt{(2n+1)!}\sqrt{(2k+1)!}$$
$$\times \sum_{\substack{0\leqslant s\leqslant n\\ s\leqslant k}} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^{2s+1}\left(\frac{\Delta_3}{2\Delta_1}\right)^{n-s}\left(\frac{\Delta_4}{2\Delta_1}\right)^{k-s}\frac{1}{(n-s)!(k-s)!(2s+1)!}c_0.$$

Следовательно, для вакуумного состояния бозе-операторов $\widetilde{b}_1$ и $\widetilde{b}_2$ имеем

$$|\widetilde{00}\rangle = \sum_{k=0,n=0}^{\infty}\left(c_{(2k)(2n)}|2k\rangle\otimes|2n\rangle + c_{(2k+1)(2n+1)}|2k+1\rangle\otimes|2n+1\rangle\right).$$

В операторной форме это соотношение может быть записано следующим образом:

$$|\widetilde{00}\rangle = c_0\exp\left(-\frac{\Delta_4}{2\Delta_1}(b_1^\dagger)^2 - \frac{\Delta_2}{\Delta_1}b_1^\dagger b_2^\dagger - \frac{\Delta_3}{2\Delta_1}(b_2^\dagger)^2\right)|0\rangle\otimes|0\rangle.$$

Таким образом, унитарный оператор

$$U = \exp\left(-\frac{\Delta_4}{2\Delta_1}(b_1^\dagger)^2 - \frac{\Delta_2}{\Delta_1}b_1^\dagger b_2^\dagger - \frac{\Delta_3}{2\Delta_1}(b_2^\dagger)^2\right)$$

является оператором преобразования вакуумных состояний для наиболее общего двумерного преобразования Боголюбова. Кроме того:

$$|\widetilde{m}\rangle\otimes|\widetilde{n}\rangle = U|m\rangle\otimes|n\rangle.$$

Задача 19. *Светоделитель* может быть построен с помощью линейной среды с *вектором поляризации*, пропорциональным входящему электрическому полю:

$$\hat{\mathbf{P}} = \chi \hat{\mathbf{E}},$$

где $\chi \equiv \chi^{(1)}$ означает восприимчивость первого порядка (линейную). Рассмотрим входящее электрическое поле, возбужденное только в пространственных модах b_1 и b_2 (при одной и той же частоте ω):

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \left((b_1 + b_2) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + h.c. \right),$$

где $h.c.$ означает эрмитово сопряжение. Гамильтониан взаимодействия содержит только резонансные члены

$$\widehat{H}_I = -\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = -\chi \hat{\mathbf{E}}^2 = \frac{\chi\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}(b_1^\dagger b_2 + b_1 b_2^\dagger),$$

где символ $\cdot$ означает скалярное произведение. Оператор эволюции (в представлении взаимодействия) всего устройства выражается следующим образом:

$$U := \exp\left(i \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} \right) \left(b_1^\dagger b_2 + b_1 b_2^\dagger \right) \right),$$

где τ

$$\tau = \left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\chi\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \right) \right)^{-1}$$

представляет собой *коэффициент прозрачности* светоделителя.

(i) Вычислить

$$\widetilde{b}_1 = U^\dagger b_1 U, \qquad \widetilde{b}_2 = U^\dagger b_2 U.$$

(ii) Найти поворот фазовой системы координат на $3\pi/2$.

Решение 19. (i) Непосредственное вычисление дает

$$\widetilde{b}_1 = U^\dagger b_1 U = -i\tau^{1/2} b_1 + (1-\tau)^{1/2} b_2,$$
$$\widetilde{b}_2 = U^\dagger b_2 U = i(1-\tau)^{1/2} b_1 + \tau^{1/2} b_2.$$

(ii) Поворот фазовой системы координат можно получить с помощью подстановки $b_1 \to -ib_1$. В этом случае

$$\widetilde{b}_1 = \tau^{1/2} b_1 + (1-\tau)^{1/2} b_2, \quad \widetilde{b}_2 = \tau^{1/2} b_2 - (1-\tau)^{1/2} b_1.$$

Задача 20. Действие *гомодинного детектора* основано на том, что в каждое плечо позади светоделителя помещается счетчик фотонов, и затем рассматривается разностный фототок между двумя модами:

$$\widehat{D} := \widetilde{b}_1^\dagger \widetilde{b}_1 - \widetilde{b}_2^\dagger \widetilde{b}_2.$$

Выразить гомодинный фототок через входные моды b_1, b_2.

Решение 20. Непосредственное вычисление дает

$$\widehat{D} = (2\tau - 1)(b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2) + 2\sqrt{\tau(1-\tau)}(b_1^\dagger b_2 + b_1 b_2^\dagger).$$

Это выражение сводится к соотношению

$$\widehat{D} = b_1^\dagger b_2 + b_1 b_2^\dagger$$

для сбалансированного ($\tau = 1/2$) светоделителя.

Задача 21. Согласно квантовой механике, *фазовый сдвиг*, δ индуцируемый линейным оптическим элементом в одномодовом оптическом поле описывается с помощью унитарного оператора

$$U := \exp(i\delta\widehat{n}),$$

где $\widehat{n} := b^\dagger b$ — *оператор числа частиц*, а b — оператор уничтожения для оптической моды. Предположим, что оптическое поле находится в состоянии $|\psi\rangle$.

(i) Выразить $|\psi\rangle$ в представлении Фока, базис которого задается состояниями с определенным числом фотонов.

(ii) Найти

$$|\psi'\rangle := U|\psi\rangle.$$

(iii) Найти

$$|\Delta\psi\rangle := |\psi'\rangle - |\psi\rangle \quad \text{и} \quad \||\Delta\psi\rangle\|.$$

Решение 21. (i) В представлении Фока состояние $|\psi\rangle$ можно записать в виде

$$|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m |m\rangle,$$

где c_m — коэффициенты разложения.

(ii) Состояние после сдвига фазы $|\psi'\rangle$ может быть записано в виде

$$|\psi'\rangle = \exp(i\delta\widehat{n}) \sum_{m=0}^{\infty} c_m |m\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{i\delta m} |m\rangle.$$

(iii) Таким образом, выражение для разности имеет вид

$$|\Delta\psi\rangle = |\psi'\rangle - |\psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (e^{i\delta m} - 1)|m\rangle$$

и, следовательно,

$$\||\Delta\psi\rangle\|^2 = \langle\Delta\psi|\Delta\psi\rangle = 4\sum_{m=0}^{\infty} |c_m|^2 \sin^2(\delta m/2) = 4\sum_{m=0}^{\infty} P_m \sin^2(\delta m/2),$$

где $P_m = |c_m|^2$ — распределение числа фотонов для входного поля.

Задача 22. Генератор сдвига в пространстве чисел заполнения формально определяется с помощью соотношения

$$D(k) := \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{ik\phi} |\phi\rangle\langle\phi|,$$

где

$$|\phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\phi} |n\rangle, \qquad \phi \in \mathbf{R}.$$

Показать, что эти базисные состояния не являются нормированными.

Решение 22. Поскольку

$$\langle\phi| = \sum_{m=0}^{\infty} \langle m| e^{-im\phi}$$

и $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$, получим

$$\langle\phi|\phi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} 1.$$

Задача 23. Пусть b_1, b_2 — бозе-операторы уничтожения. Показать, что

$$e^{\mu b_1 b_2} e^{\nu b_1^\dagger b_2^\dagger}|00\rangle = \frac{1}{1-\mu\nu} e^{\nu b_1^\dagger b_2^\dagger/(1-\mu\nu)}|00\rangle, \qquad \mu,\nu \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

где $|00\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle$.

Решение 23. Для решении задачи рассмотрим выражение

$$e^{\mu b_1 b_2} e^{\nu b_1^\dagger b_2^\dagger}|00\rangle = e^{f(\mu, b_1^\dagger, b_2^\dagger)}|00\rangle,$$

где f — аналитическая функция. Дифференцируя обе части по μ, получим

$$b_1 b_2 e^{\mu b_1 b_2} e^{\nu b_1^\dagger b_2^\dagger}|00\rangle = e^f \frac{\partial f}{\partial \mu}|00\rangle.$$

Таким образом,

$$b_1 b_2 e^f|00\rangle = e^f \frac{\partial f}{\partial \mu}|00\rangle.$$

Заметим, что $\partial f/\partial\mu$ коммутирует с $\exp(f)$, поскольку f — функция только от $b_1^\dagger$ и $b_2^\dagger$. Если умножить выражение слева на $\exp(-f)$, получим

$$e^{-f} b_1 b_2 e^f|00\rangle = \frac{\partial f}{\partial \mu}|00\rangle.$$

Отсюда следует, что

$$e^{-f} b_1 e^f e^{-f} b_2 e^f|00\rangle = \frac{\partial f}{\partial \mu}|00\rangle.$$

Используя соотношение

$$[b, g(b, b^\dagger)] = \frac{\partial g}{\partial b^\dagger} \tag{2}$$

при $g = e^f$, получим

$$e^{-f} b_1 e^f = e^{-f}\left(e^f b_1 + \frac{\partial e^f}{\partial b_1^\dagger}\right) = b_1 + \frac{\partial f}{\partial b_1^\dagger},$$

поскольку e^f коммутирует с $\partial f/\partial b_1^\dagger$. Аналогично

$$e^{-f} b_2 e^f = b_2 + \frac{\partial f}{\partial b_2^\dagger}.$$

Таким образом, получим

$$\left(b_1 + \frac{\partial f}{\partial b_1^\dagger}\right)\left(b_2 + \frac{\partial f}{\partial b_2^\dagger}\right)|00\rangle = \frac{\partial f}{\partial \mu}|00\rangle.$$

Поскольку $b_2|00\rangle = 0$, выражение принимает вид

$$\left(b_1 \frac{\partial f}{\partial b_2^\dagger} + \frac{\partial f}{\partial b_1^\dagger}\frac{\partial f}{\partial b_2^\dagger}\right)|00\rangle = \frac{\partial f}{\partial \mu}|00\rangle.$$

Вновь используя (2) при $g = \partial f/\partial b_2^\dagger$, получим

$$b_1 \frac{\partial f}{\partial b_2^\dagger} = \frac{\partial f}{\partial b_2^\dagger} b_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial b_1^\dagger \partial b_2^\dagger}.$$

Так как $b_1|00\rangle = 0$, то

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial b_1^\dagger \partial b_2^\dagger} + \frac{\partial f}{\partial b_1^\dagger}\frac{\partial f}{\partial b_2^\dagger}\right)|00\rangle = \frac{\partial f}{\partial \mu}|00\rangle.$$

Поскольку f содержит только b_1 и b_2, которые коммутируют, решение этого уравнения в частных производных должно иметь вид

$$f(\mu, b_1^\dagger, b_2^\dagger) = h_1(\mu) I + h_2(\mu) b_1^\dagger b_2^\dagger.$$

Таким образом,

$$f(0, b_1^\dagger, b_2^\dagger) = \nu b_1^\dagger b_2^\dagger$$

или

$$h_1(0) = 0, \qquad h_2(0) = \nu$$

вследствие (1). Используя эту подстановку для уравнения в частных производных и приравнивая коэффициенты при равных степенях $b_1^\dagger b_2^\dagger$, получим, что h_1 и h_2 удовлетворяют системе обычных дифференциальных уравнений

$$\frac{dh_2}{d\mu} = h_2^2, \qquad \frac{dh_1}{d\mu} = h_2$$

и являются решением задачи Коши

$$h_2(\mu) = \frac{\nu}{1-\mu\nu}, \qquad h_1(\mu) = -\ln(1-\mu\nu).$$

Таким образом, получаем (1).

Задача 24. Стандартная *группа Паули* для квантовых вычислений в непрерывных переменных для системы из n связанных осцилляторов является группой Гейзенберга–Вейля, которая состоит из операторов сдвига в фазовом пространстве n гармонических осцилляторов. Эта группа является непрерывной группой Ли и следовательно порождается только множеством непрерывно-параметризированных операторов. Алгебра Ли, которая порождает эту группу, натянута на $2n$ канонических операторов $\widehat{p}_j$, $\widehat{q}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и, кроме того, выполнено коммутационное соотношение

$$[\widehat{q}_j, \widehat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk}I.$$

В случае одного осциллятора ($n = 1$) алгебра порождается каноническими операторами $\{\widehat{q}, \widehat{p}, I\}$. Введем обозначение

$$X(q) := e^{-(i/\hbar)q\widehat{p}}, \qquad Z(p) := e^{(i/\hbar)p\widehat{q}},$$

где $q, p \in \mathbf{R}$. Пусть $\{|s\rangle : s \in \mathbf{R}\}$ — собственные состояния для оператора координаты (в смысле обобщенных функций).

(i) Вычислить

$$X(q)|s\rangle,$$
$$Z(p)|s\rangle.$$

(ii) Найти коммутатор $[X(q), Z(p)]$.

Решение 24. (i) Оперируя с величинами в смысле обобщенных функций, получим

$$X(q)|s\rangle = |s+q\rangle, \qquad Z(p)|s\rangle = \exp((i/\hbar)ps)|s\rangle.$$

Таким образом, оператор $X(q)$ является оператором сдвига координаты. Оператор $Z(p)$ — оператор сдвига импульса.

(ii) Получим

$$X(q)Z(p) = e^{-(i/\hbar)qp}Z(p)X(q).$$

Таким образом,

$$[X(q), Z(p)] = (I - e^{(i/\hbar)qp})X(q)Z(p).$$

Задача 25. Пусть $r \in \mathbf{R}$. Найти ϵ_1, ϵ_2 и ϵ_3 такие, что

$$e^{r(b_1^\dagger b_2^\dagger - b_1 b_2)} \equiv e^{\epsilon_1 b_1^\dagger b_2^\dagger} e^{\epsilon_2 (b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2 + I)} e^{\epsilon_3 b_1 b_2}.$$

Решение 25. Используя тот факт, что операторы

$$\begin{aligned} K_+ &:= -b_1 b_2, \\ K_- &:= b_1^\dagger b_2^\dagger, \\ K_3 &:= -\frac{1}{2}(b_1^\dagger b_1 + b_2^\dagger b_2 + I) \end{aligned}$$

образуют алгебру Ли

$$\begin{aligned} [K_3, K_+] &= K_+, \\ [K_3, K_-] &= -K_-, \\ [K_+, K_-] &= 2K_3 \end{aligned}$$

и

$$e^{r(K_+ + K_-)} \equiv e^{K_- \operatorname{th}(r)} e^{2\ln(\operatorname{ch}(r))K_3} e^{K_+ \operatorname{th}(r)},$$

получим

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \operatorname{ch}\operatorname{th}(r), \\ \epsilon_2 &= -\ln(\operatorname{ch}(r)), \\ \epsilon_3 &= -\operatorname{th}(r). \end{aligned}$$

Задача 26. Благодаря своим спиральным волновым фронтам, электромагнитное поле фотонов, обладающее орбитальным моментом импульса, имеет фазовую сингулярность. Интенсивность выходящего излучения должна быть пренебрежимо мала из-за тороидального распределения интенсивности. Эти световые поля можно описать, используя моды Лагерра–Гаусса (LG_{pl}) с двумя индексами p и l. Индекс p ($p = 0, 1, 2, \ldots$) обозначает неосевые радиальные узлы, наблюдаемые в поперечной плоскости, и индекс l ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) означает число 2π-фазовых сдвигов (оборотов) по замкнутому контуру вокруг центра пучка. Индекс l также называется топологическим числом кручения, поскольку он описывает спиральную структуру фронта волны вокруг сингулярности фронта волны или дислокацию. Индекс l также определяет количество орбитального момента импульса в единицах $\hbar$ в расчете на один фотон. Пусть в качестве накачки используется мода $LG_{l_0 p_0}$. Рассмотрим коллинеарный режим и предположим, что выполняются условия фазового синхронизма. Тогда двухфотонное состояние на выходе из нелинейного кристалла может быть записано как когерентная суперпозиция собственных состояний оператора орбитального момента импульса, причем в этих состояниях орбитальные моменты импульса фотонов строго коррелируют; т. е $l_1 + l_2 = l_0$, где l_1 и l_2 — квантовые числа, отвечающие орбитальному моменту импульса для соответственно сигнального и холостого фотонов. Состояние фотона, описываемого модой LG, может быть записано в виде

$$|lp\rangle := \int dq LG_{lp}(q) b^\dagger(q)|0\rangle,$$

где функция моды в области пространственных частот определяется в виде

$$LG_{lp}(\rho, \phi) := \left(\frac{\omega_0 p!}{2\pi(|l| + p)!}\right)^{1/2} \left(\frac{\omega_0 \rho_k}{\sqrt{2}}\right)^{|l|}$$

$$\times L_p^{|l|}\left(\frac{\rho_k^2 \omega_0^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{\rho_k^2 \omega_0^2}{4}\right)$$

$$\times \exp\left(il\phi_k + i\left(p - \frac{|l|}{2}\right)\pi\right),$$

где ρ_k и ϕ_k — это соответственно модуль и фаза поперечной координаты q. Функции $L_p^{|l|}$ являются *присоединенными полиномами Лагерра*, и ω_0 — толщина пучка. Найти состояние $|lp\rangle$ при $l = p = 0$.

Решение 26. Поскольку присоединенный полином Лагерра L_0^0 равен

$$L_0^0(x) = 1,$$

получим

$$LG_{00} = \left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\rho_k^2\omega_0^2}{4}\right).$$

Таким образом, для LG_{00} найден гауссиан.

Задача 27. Пусть $\{|n\rangle : n = 0, 1, 2, \dots\}$ — фоковские состояния (состояния с определенным числом частиц). Рассмотрим линейный оператор

$$T_{13} := \sum_{n=0}^{\infty}(|n\rangle \otimes I \otimes I)(I \otimes I \otimes \langle n|)$$

в бесконечномерном гильбертовом пространстве произведений $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$, где $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_3$. Здесь I означает тождественный оператор. Применить оператор T_{13} к состоянию

$$I \otimes I \otimes |\psi\rangle.$$

Решение 27. С учетом того что

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\psi\rangle|n\rangle,$$

получим

$$\begin{aligned} T_{13}(I \otimes I \otimes |\psi\rangle) &= \sum_{n=0}^{\infty}(|n\rangle \otimes I \otimes I)(I \otimes I \otimes \langle n|\psi\rangle I) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\langle n|\psi\rangle|n\rangle) \otimes I \otimes I \\ &= |\psi\rangle \otimes I \otimes I. \end{aligned}$$

Оператор T_{13} можно рассматривать как *оператор переноса* (*transfer operator*).

Задача 28. Чтобы построить простой квантовый компьютер, можно использовать следующие оптические вентили

$$U_S := \exp(i\pi b^\dagger b) \qquad \text{— } \textit{фазовый модулятор};$$

$$U_B := \exp\left(\frac{\pi}{4}(b_1^\dagger b_2 - b_1 b_2^\dagger)\right) \qquad \text{— } \textit{квантовый светоделитель};$$

$$U_F := \exp\left(\frac{\chi}{2}b_3^\dagger b_3(b_1^\dagger b_2 - b_1 b_2^\dagger)\right) \qquad \text{— } \textit{вентиль Фредкина}.$$

(i) Вычислить

$$e^{i\pi b^\dagger b}|n\rangle.$$

(ii) Вычислить

$$U_B|01\rangle.$$

(iii) Вычислить

$$U_F|011\rangle, \qquad U_F|101\rangle, \qquad U_F|xy0\rangle$$

при $\chi = \pi$ и $x, y \in \{0, 1\}$.

Решение 28. (i) Поскольку $b^\dagger b|n\rangle = n|n\rangle$, то

$$e^{i\pi b^\dagger b}|n\rangle = e^{i\pi n}|n\rangle.$$

(ii) Так как

$$(b_1^\dagger b_2 - b_1 b_2^\dagger)|01\rangle = |10\rangle, \qquad (b_1^\dagger b_2 - b_1 b_2^\dagger)|10\rangle = -|01\rangle$$

и учитывая, что $\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ и $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, получим

$$U_B|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right).$$

(iii) Поскольку

$$b_3^\dagger b_3(b_1^\dagger b_2 - b_1 b_2^\dagger)|011\rangle = |101\rangle, \qquad b_3^\dagger b_3(b_1^\dagger b_2 - b_1 b_2^\dagger)|101\rangle = -|011\rangle$$

и
$$b_3^\dagger b_3(b_1^\dagger b_2 - b_1 b_2^\dagger)|xy0\rangle = 0,$$
а также учитывая, что $b|0\rangle = 0$ и $b|1\rangle = |0\rangle$, получим
$$U_F|101\rangle = -|011\rangle, \qquad U_F|011\rangle = |101\rangle, \qquad U_F|xy0\rangle = |xy0\rangle.$$
Таким образом, $b_3^\dagger b_3$ играет роль оператора управления.

Глава 15

Когерентные состояния

Квантовые когерентные состояния являются ближайшим квантово-механическим аналогом классической частицы, осциллирующей в гармоническом потенциале. Когерентные состояния являются состояниями с минимальной неопределенностью. Квантовые вычислительные сети с когерентными состояниями в качестве логических кубитов можно построить, используя простые линейные сети, условные измерения и ресурсы, заложенные в когерентной суперпозиции состояний. Когерентные состояния являются очень чувствительными к окружающей среде. Выходной сигнал одномодового стабилизированного лазера может быть описан когерентным состоянием $|\beta\rangle$, где β — комплексное число, которое определяет среднюю амплитуду поля.

Задача 1. Бозе-операторы рождения $b^\dagger$ и уничтожения b удовлетворяют *алгебре Гейзенберга*

$$[b, b^\dagger] = I,$$

$$[b, b] = [b^\dagger, b^\dagger] = 0,$$

причем $b|0\rangle = 0$, где $|0\rangle$ — вакуумное состояние. *Когерентные состояния* $|\beta\rangle$ можно получить, действуя унитарным *оператором сдвига* (*displacement operator*)

$$D(\beta) := \exp(\beta b^\dagger - \beta^* b) = \exp(-\frac{1}{2}|\beta|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \qquad \beta \in \mathbf{C}$$

на вакуумное состояние $|0\rangle$, т. е.

$$|\beta\rangle := D(\beta)|0\rangle = \exp(\beta b^\dagger - \beta^* b)|0\rangle.$$

Показать с помощью этого определения, что когерентные состояния также могут быть получены как собственные состояния оператора уничтожения b, т. е.

$$b|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle.$$

Решение 1. Рассмотрим следующий коммутатор

$$[b, (\beta b^\dagger - \beta^* b)^n] = \beta n(\beta b^\dagger - \beta^* b)^{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда следует, что справедливо коммутационное соотношение

$$[b, D(\beta)] = \beta D(\beta).$$

Поскольку $b|0\rangle = 0$ и учитывая коммутационное соотношение, получим

$$0 = D(\beta)b|0\rangle = (b - \beta I)D(\beta)|0\rangle = (b - \beta I)|\beta\rangle.$$

Задача 2. Когерентные состояния гармонического осциллятора могут быть определены тремя различными эквивалентными способами. Описать их.

Решение 2. Во-первых, когерентные состояния — это собственные состояния бозе-оператора уничтожения

$$b|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle, \qquad \beta \in \mathbf{C}.$$

Таким образом, спектр оператора b заполняет всю комплексную плоскость. Во-вторых, когерентные состояния являются сдвинутыми вакуумными состояниями

$$|\beta\rangle = \exp(-|\beta|^2/2)\exp(\beta b^\dagger)\exp(-\beta^* b)|0\rangle,$$

где $|0\rangle$ — вакуумное состояние с $\langle 0|0\rangle = 1$. Поскольку $b|0\rangle = 0$, получим

$$|\beta\rangle = \exp(-|\beta|^2/2)\exp(\beta b^\dagger)|0\rangle.$$

В-третьих, когерентные состояния — это состояния с минимальной неопределенностью

$$\Delta p \Delta x = \frac{\hbar}{2}$$

и, следовательно, являются самыми «классическими» в квантовой теории.

Задача 3. Пусть $|\beta\rangle$ и $|\gamma\rangle$ — когерентные состояния.

(i) Вычислить $\langle\gamma|\beta\rangle$.

(ii) Вычислить $\langle 0|\beta\rangle$.

(iii) Найти $|\langle\gamma|\beta\rangle|^2$.

Решение 3. (i) Поскольку

$$|\beta\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\beta|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \qquad |\gamma\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\gamma|^2)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\gamma^m}{\sqrt{m!}}|m\rangle$$

и с учетом $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$, получаем

$$\begin{aligned}\langle\gamma|\beta\rangle &= \exp(-\frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\gamma|^2))\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma^{*m}}{\sqrt{m!}}\frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}\langle m|n\rangle \\ &= \exp(-\frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\gamma|^2))\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta\gamma^*)^n}{n!} \\ &= \exp(-\frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\gamma|) + \beta\gamma^*).\end{aligned}$$

(ii) Используя результаты (i), получим

$$\langle 0|\beta\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2\right).$$

(iii) Используя результаты (i), получим

$$|\langle\gamma|\beta\rangle|^2 = \exp(-|\beta - \gamma|^2).$$

Если $\gamma = \beta$, то $|\langle\beta|\beta\rangle|^2 = 1$.

Задача 4. Рассмотрим гамильтониан

$$\widehat{H} = \hbar\omega b^\dagger b.$$

Пусть
$$U(t) := \exp(-it\widehat{H}/\hbar),$$
где $|\beta\rangle$ — когерентные состояния. Найти $U(t)|\beta\rangle$.

Решение 4. Поскольку
$$|\beta\rangle = e^{-|\beta|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$
и
$$b^\dagger b|n\rangle = n|n\rangle,$$
получаем
$$U(t)|\beta\rangle = |\beta e^{-i\omega t}\rangle.$$
Таким образом, линейная эволюция $|\beta\rangle$ означает вращение в фазовом пространстве. Начальное состояние будет восстанавливаться при $\omega t = 2\pi, 4\pi, \ldots$, как и предполагалось.

Задача 5. Пусть
$$D(\beta) := \exp(\beta b^\dagger - \beta^* b).$$
Найти
$$D(\beta)bD(-\beta)$$
и
$$D(\beta)b^\dagger D(-\beta).$$

Решение 5. Поскольку
$$[b^\dagger, b] = -I, \qquad [b^\dagger, [b^\dagger, b]] = 0,$$
имеем
$$D(\beta)bD(-\beta) = b - \beta I.$$
Аналогично
$$D(\beta)b^\dagger D(-\beta) = b^\dagger - \beta^* I.$$

Задача 6. Когерентные состояния имеют вид

$$|\beta\rangle := e^{-\beta\beta^*/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\beta^m}{\sqrt{m!}}|m\rangle,$$

где β — комплексное число. Тогда $b|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$ (характеристическое уравнение),

$$\sum_{m=0}^{\infty}|m\rangle\langle m| = I$$

и $b^\dagger b|n\rangle = n|n\rangle$.

(i) Вычислить

$$P_n := |\langle n|\beta\rangle|^2.$$

(ii) Пусть $\widehat{n} := b^\dagger b$. Вычислить

$$\langle\widehat{n}\rangle := \langle\beta|\widehat{n}|\beta\rangle, \quad \langle\widehat{n}^2\rangle := \langle\beta|\widehat{n}^2|\beta\rangle.$$

(iii) Вычислить *дисперсию*

$$\langle(\Delta\widehat{n})^2\rangle := \langle(\widehat{n} - \langle\widehat{n}\rangle I)^2\rangle.$$

Решение 6. (i) Используя $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$, получим

$$P_n = \frac{(\beta\beta^*)^n\exp(-\beta\beta^*)}{n!}.$$

Это распределение называется *распределением Пуассона*.

(ii) Поскольку $b|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$ и, следовательно, $\langle\beta|b^\dagger = \langle\beta|\beta^*$, получим

$$\langle\widehat{n}\rangle = \langle\beta|b^\dagger b|\beta\rangle = \beta\beta^*,$$

и с учетом того, что $bb^\dagger = b^\dagger b + I$:

$$\langle\widehat{n}^2\rangle = (\beta\beta^*)^2 + \beta\beta^*.$$

(iii) Используя результаты из (ii), получим

$$\langle(\Delta\widehat{n})^2\rangle := \langle(\widehat{n} - \langle\widehat{n}\rangle I)^2\rangle = \beta\beta^*.$$

Задача 7. Когерентные состояния имеют вид

$$|\beta\rangle := e^{-\beta\beta^*/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle,$$

где β — комплексное число. Пусть $|\psi\rangle$ — произвольное состояние в гильбертовом пространстве, содержащем $|\beta\rangle$. Показать, что

$$|\psi(\beta)| \leqslant \exp\left(\frac{1}{2}|\beta|^2\right).$$

Решение 7. Из следующего известного тождества (*соотношения полноты*)

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbf{C}} d^2\beta |\beta\rangle\langle\beta| = \sum_{m=0}^{\infty} |m\rangle\langle m| = I$$

следует, что система когерентных состояний полная. Используя это уравнение, можно разложить произвольное состояние $|\psi\rangle$ относительно состояния $|\beta\rangle$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbf{C}} d^2\beta \langle\beta|\psi\rangle|\beta\rangle.$$

Если когерентное состояние $|\beta\rangle$ выбирается в качестве $|\psi\rangle$, это уравнение определяет линейную зависимость между различными когерентными состояниями. Отсюда следует, что система когерентных состояний является *суперполной*, т. е. она содержит подсистемы, которые являются полными. Используя определение когерентного состояния, данного выше, получим

$$\langle\beta|\psi\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2\right) \psi(\beta^*),$$

где

$$\psi(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} \langle n|\psi\rangle.$$

Неравенство $|\langle n|\psi\rangle| \leqslant 1$ означает, что функция $\psi(\beta)$ для нормированного состояния $|\psi\rangle$ является *целой аналитической функцией* комплексных переменных β. Кроме того, $|\langle\beta|\psi\rangle| \leqslant 1$. Следовательно, найдена граница роста $\psi(\beta)$

$$|\psi(\beta)| \leqslant \exp\left(\frac{1}{2}|\beta|^2\right).$$

Условие нормировки может быть записано в виде

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbf{C}} d^2\beta \exp(-|\beta|^2)|\psi(\beta)|^2 = \langle\psi|\psi\rangle.$$

Задача 8. Когерентные состояния $|\beta\rangle$ могут быть записаны в виде

$$|\beta\rangle = D(\beta)|0\rangle,$$

где

$$D(\beta) := \exp(\beta b^\dagger - \beta^* b),$$

а $|0\rangle$ обозначает вакуумное состояние. Показать, что

$$D(\beta)D(\gamma) = \exp(i\,\mathrm{Im}(\beta\gamma^*))D(\beta+\gamma). \tag{1}$$

Решение 8. Поскольку $[b, b^\dagger] = I$, получим

$$[\beta b^\dagger - \beta^* b, \gamma b^\dagger - \gamma^* b] = -[\beta b^\dagger, \gamma^* b] - [\beta^* b, \gamma b^\dagger] = (\beta\gamma^* - \beta^*\gamma)I = 2i\,\mathrm{Im}(\beta\gamma^*)I.$$

Используя *формулу Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа* (*Baker–Campbell–Hausdorff formula*)

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{[A,B]/2}$$

при $[[A,B],A] = 0$ и $[[A,B],B] = 0$, получим (1). Поэтому

$$D(\beta)D(\gamma)D(-\beta) = e^{2i\,\mathrm{Im}(\beta\gamma^*)}D(\gamma).$$

Отсюда следует, что операторы $\exp(2\pi i t)D(\beta)$ образуют группу. Элемент g группы определяется вещественным числом t и комплексным числом β: $g(t,\beta)$. Произведение двух элементов группы $g = g_1 g_2$ определяется через $g(t,\beta)$, где

$$t = t_1 + t_2 + \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Im}(\beta_2\beta_1^*)$$

и $\beta = \beta_1 + \beta_2$.

Задача 9. Рассмотрим оператор сдвига

$$D(\beta) = \exp(\beta b^\dagger - \beta^* b).$$

Показать, что

$$D(\beta)D(\gamma) = e^{\beta\gamma^* - \beta^*\gamma} D(\gamma)D(\beta). \tag{1}$$

Решение 9. Поскольку

$$[\beta b^\dagger - \beta^* b, \gamma b^\dagger - \gamma^* b] = (\beta\gamma^* - \beta^*\gamma)I,$$

где I — тождественный оператор, можно использовать формулу Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа

$$e^A e^B e^{-1/2[A,B]} = e^B e^A e^{1/2[A,B]}$$

при

$$[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0.$$

Применяя эту формулу, получим (1).

Задача 10. (i) *Распределение Хусими* (*Husimi distribution*) когерентного состояния γ имеет вид

$$\rho^H_\gamma(\beta) := |\langle\beta|\gamma\rangle|^2.$$

Вычислить $\rho^H_\gamma(\beta)$.

(ii) Распределение Хусими состояния с определенным числом частиц (фоковское состояние) $|n\rangle$ имеет вид

$$\rho^H_{|n\rangle}(\beta) := |\langle\beta|n\rangle|^2.$$

Вычислить $\rho^H_{|n\rangle}(\beta)$.

(iii) Рассмотрим состояние $|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$. Найти

$$\rho^H_{|n_1\rangle\otimes|n_2\rangle}(\beta) = |(\langle\beta_1| \otimes \langle\beta_2|)(|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle).$$

Решение 10. (i) Поскольку

$$|\beta\rangle = e^{-|\beta|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \qquad |\gamma\rangle = e^{-|\gamma|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

и с учетом $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$, получим

$$\langle\beta|\gamma\rangle = e^{-|\beta|^2/2}e^{-|\gamma|^2/2}e^{\beta^*\gamma}.$$

Таким образом,

$$|\langle\beta|\gamma\rangle|^2 = e^{-|\beta-\gamma|^2},$$

и распределение Хусими когерентного состояния является *гауссовым*.

(ii) Поскольку $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$, получим

$$\langle\beta|n\rangle = e^{-|\beta|^2/2}\frac{\beta^{*n}}{\sqrt{n!}}$$

и, следовательно,

$$|\langle\beta|n\rangle|^2 = \frac{e^{-|\beta|^2/2}(|\beta|^2)^n}{n!}.$$

Распределение Хусими представляет собой *распределение Пуассона* для состояния с определенным числом фотонов.

(iii) Поскольку

$$(\langle\beta_1|\otimes\langle\beta_2|)(|n_1\rangle\otimes|n_2\rangle) = \langle\beta_1|n_1\rangle\langle\beta_2|n_2\rangle,$$

получим

$$\rho^H_{|n_1\rangle\otimes|n_2\rangle}(\beta) = \frac{e^{-|\beta_1|^2/2}(|\beta_1|^2)^{n_1}}{n_1!}\frac{e^{-|\beta_2|^2/2}(|\beta_2|^2)^{n_2}}{n_2!}.$$

Задача 11. Рассмотрим линейный оператор

$$Z := b_1 + b_2^\dagger, \tag{1}$$

где $b_1 = b\otimes I$ и $b_2^\dagger = I\otimes b^\dagger$. Пусть

$$D_b(z) := e^{zb^\dagger - z^*b}, \qquad z\in\mathbf{C},$$

— *оператор сдвига* и

$$|0\rangle\rangle := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n|n\rangle\otimes|n\rangle$$

в фоковском базисе (состояний с определенным числом частиц). Определим состояния $|z\rangle\rangle$ в виде

$$|z\rangle\rangle := D_{b_1}(z)|0\rangle\rangle = D_{b_2}(z^*)|0\rangle\rangle.$$

(i) Найти $Z|z\rangle\rangle$. Сделать выводы.

(ii) Найти $\langle\langle z|z'\rangle\rangle$.

Решение 11. (i) Очевидно, что $[Z, Z^\dagger] = 0$ и

$$Z|z\rangle\rangle = z|z\rangle\rangle, \qquad z \in \mathbf{C}.$$

Таким образом, $|z\rangle\rangle$ является собственным состоянием Z. При $z = 0$ состояние $|0\rangle\rangle$ может быть аппроксимировано физическим (нормируемым) состоянием, называемым *состоянием двойного пучка* — соответствующим выходному сигналу невырожденного оптического параметрического усилителя при бесконечном коэффициенте усиления.

(ii)

$$\langle\langle z|z'\rangle\rangle = \delta^{(2)}(z - z').$$

Задача 12. Бозе-операторы рождения ($\mathbf{b}^\dagger$) и уничтожения ($\mathbf{b}$), где

$$\mathbf{b}^\dagger = (b_1^\dagger, b_2^\dagger, \ldots, b_N^\dagger), \qquad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_N),$$

удовлетворяют *алгебре Гейзенберга*

$$[b_j, b_k^\dagger] = \delta_{jk} I,$$

$$[b_j, b_k] = [b_j^\dagger, b_k^\dagger] = 0, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, N.$$

Когерентные состояния, где $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$, определяются как собственные векторы операторов уничтожения, то есть

$$\mathbf{b}|\mathbf{z}\rangle = \mathbf{z}|\mathbf{z}\rangle.$$

(i) Показать, что нормированные когерентные состояния имеют вид

$$|\mathbf{z}\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\mathbf{z}|^2)\exp(\mathbf{z} \cdot \mathbf{b}^\dagger)|\mathbf{0}\rangle, \tag{1}$$

где

$$|\mathbf{z}|^2 = \sum_{j=1}^{N} |z_j|^2, \qquad \mathbf{z}\cdot\mathbf{b}^\dagger = \sum_{j=1}^{N} z_j b_j^\dagger$$

и $|\mathbf{0}\rangle = |00\ldots 0\rangle$ — вакуумный вектор, удовлетворяющий условию

$$\mathbf{b}|\mathbf{0}\rangle = \mathbf{0}.$$

(ii) Пусть $|\mathbf{w}\rangle$ — когерентное состояние. Найти

$$\langle \mathbf{z}|\mathbf{w}\rangle, \qquad |\langle \mathbf{z}, \mathbf{w}\rangle|^2.$$

(iii) Вычислить

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{2N}} d\mu(\mathbf{z})|\mathbf{z}\rangle\langle\mathbf{z}|.$$

Решение 12. (i) Рассмотрим представление чисел заполнения

$$|\mathbf{n}\rangle \equiv |n_1, n_2, \ldots, n_N\rangle = \frac{(b_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}}\frac{(b_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}}\cdots\frac{(b_N^\dagger)^{n_N}}{\sqrt{n_N!}}|\mathbf{0}\rangle.$$

Разлагая $|\mathbf{z}\rangle$ по $|\mathbf{n}\rangle$ и применяя

$$b_j|\mathbf{n}\rangle = \sqrt{n_j}|n_1, \cdots, n_j - 1, \cdots, n_N\rangle,$$

$$b_j^\dagger|\mathbf{n}\rangle = \sqrt{n_j + 1}|n_1, \cdots, n_j + 1, \cdots, n_N\rangle,$$

после нормировки получим, что $|\mathbf{z}\rangle$ имеет вид (1).

(ii) Вычисляем

$$\langle \mathbf{z}|\mathbf{w}\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}(|\mathbf{z}|^2 + |\mathbf{w}|^2 - 2\mathbf{z}^*\cdot\mathbf{w})\right)$$

и

$$|\langle \mathbf{z}|\mathbf{w}\rangle|^2 = \exp(-|\mathbf{z} - \mathbf{w}|^2).$$

(iii) Поскольку

$$d\mu(\mathbf{z}) = \frac{1}{\pi}\prod_{j=1}^{N} d(\operatorname{Re} z_j)d(\operatorname{Im} z_j),$$

получим
$$\int\limits_{\mathbf{R}^{2N}} d\mu(\mathbf{z})|\mathbf{z}\rangle\langle\mathbf{z}| = I,$$
где I — тождественный оператор.

Задача 13. В *среде Керра* эволюция состояния определяется гамильтонианом взаимодействия
$$\widehat{H} = \lambda(b^\dagger b)^2,$$
где λ — постоянная связи, пропорциональная нелинейной восприимчивости среды. Когерентное состояние входного сигнала $|\beta\rangle$ развивается в соответствии с решением уравнения Шредингера
$$|\psi_c(t)\rangle = \exp(-i\widehat{H}t)|\beta\rangle.$$
Вычислить $|\psi_c(t)\rangle$ при $t = \pi/(2\lambda)$. Сделать вывод.

Решение 13. Непосредственное вычисление дает
$$\begin{aligned}|\psi_c(t = \pi/(2\lambda))\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\pi/4}|\beta\rangle + e^{i\pi/4}|-\beta\rangle)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\pi/4}D(\beta) + e^{i\pi/4}D(-\alpha))|0\rangle,\end{aligned}$$
где
$$D(\beta) := \exp(\beta b^\dagger - \overline{\beta} b)$$
— оператор сдвига. Состояние описывает суперпозицию двух когерентных состояний с противоположными фазами. Как только $|\beta|$ становится больше, две компоненты становятся мезоскопически различимыми состояниями поля излучения. Однако реальные значения нелинейных восприимчивостей Керра достаточно малы, поэтому необходимо долгое время взаимодействия или, что то же самое, большая длина взаимодействия. Поэтому потери становятся значительными и результирующая декогерентность может разрушить квантовую суперпозицию.

Задача 14. Взаимодействие, соответствующее светоделителю, определяется с помощью следующего унитарного преобразования
$$U_{BS} = \exp(i\theta(b_1 b_2^\dagger + b_1^\dagger b_2)),$$

где b_1 и b_2 — бозе-операторы уничтожения. Пусть $|\beta\rangle$, $|\gamma\rangle$ — когерентные состояния. Вычислить
$$U_{BS}|\gamma\rangle \otimes |\beta\rangle.$$

Решение 14. Имеем

$$U_{BS}|\gamma\rangle \otimes |\beta\rangle = |\cos(\theta)\gamma + i\sin(\theta)\beta\rangle \otimes |\cos(\theta)\beta + i\sin(\theta)\gamma\rangle,$$

где $\cos^2(\theta)$ $(\sin^2(\theta))$ — коэффициент отражения (коэффициент прозрачности) светоделителя.

Задача 15. *След* аналитической функции $f(b, b^\dagger)$ может быть вычислен следующим образом:

$$\mathrm{tr}(f(b, b^\dagger)) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|f(b, b^\dagger)|n\rangle,$$

где $\{|n\rangle : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ — состояния с определенным числом частиц. Второй метод состоит в получении нормально упорядоченных функций f и интегрировании по комплексной плоскости

$$\mathrm{tr}(f(b, b^\dagger)) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{C}} \overline{f}^{(n)}(\beta, \beta^*) d^2\beta.$$

(i) Найти след $e^{-\epsilon b^\dagger b}$, используя второй метод, где $\epsilon > 0$.

(ii) Сравнить с первым методом.

Решение 15. (i) Нормально упорядоченная форма $e^{-\epsilon b^\dagger b}$ имеет вид

$$e^{-\epsilon b^\dagger b} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(e^{-\epsilon} - 1)^k (b^\dagger)^k b^k.$$

То есть необходимо вычислить интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{C}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(e^{-\epsilon} - 1)^k (\beta^*)^k \beta^k d^2\beta.$$

Положим $\beta = re^{i\phi}$, тогда $\beta\beta^* = r^2$. Поскольку $d^2\beta \to d\phi r dr$ при $\phi \in [0, 2\pi)$, $r \in [0, \infty)$ и

$$\int\limits_0^{2\pi} d\phi = 2\pi, \qquad \int\limits_0^{\infty} re^{-ar^2} dr = \frac{1}{2a},$$

получим

$$\text{tr}(e^{-\epsilon b^\dagger b}) = \frac{1}{1 - e^{-\epsilon}}.$$

(ii) Первый метод дает следующий результат:

$$\begin{aligned}
\text{tr}(e^{-\epsilon b^\dagger b}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\epsilon b^\dagger b} | n \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | e^{-\epsilon n} | n \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\epsilon n} \langle n | n \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\epsilon n} \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\epsilon}}.
\end{aligned}$$

Видно, что первый метод применять легче.

Глава 16

Сжатые состояния

Когерентные состояния не являются самым общим видом гауссова волнового пакета. Эти состояния также нельзя назвать общим видом волновых пакетов с минимальной неопределенностью, поскольку волновой пакет с минимальной неопределенностью удовлетворяет соотношению $\Delta q \Delta p = \hbar/2$, которое ограничивает только произведение дисперсий Δq и Δp, тогда как для когерентных состояний $(\Delta q)^2 = \hbar/(2\omega)$ и $(\Delta p)^2 = \hbar\omega/2$. В случае сжатых состояний такого ограничения нет. В отличие от когерентного состояния, начальное сжатое состояние не остается состоянием с минимальной неопределенностью с течением времени при эволюции гармонического осциллятора. Вместо этого произведение $\Delta q \Delta p$ осциллирует с удвоенной частотой гармонического осциллятора между максимальным и минимальным значениями. Сжатые состояния обладают тем свойством, что через каждую квадратурную фазу происходит уменьшение флуктуаций по сравнению с обычным вакуумом. Сжатые состояния электромагнитного поля генерируются в оптическом резонаторе путем вырожденного параметрического преобразования с понижением частоты. Идеальное сжатое состояние гармонического осциллятора определяется с помощью соотношения

$$|\beta, \epsilon\rangle := D(\beta)S(\epsilon)|0\rangle,$$

где

$$D(\beta) := \exp(\beta b^\dagger - \beta^* b)$$

— *оператор сдвига*, а

$$S(\epsilon) := \exp\left(\frac{1}{2}\epsilon^* b^2 - \frac{1}{2}\epsilon b^{\dagger 2}\right)$$

— *оператор сжатия*, где $\epsilon = re^{i\phi}$ (r — *параметр сжатия*).

Задача 1. Рассмотрим линейный оператор

$$\widehat{D} := \frac{1}{2}(\widehat{q}\widehat{p} + \widehat{p}\widehat{q}).$$

Положим $\hbar = 1$.

(i) Найти $[\widehat{D}, \widehat{q}]$ и $[\widehat{D}, \widehat{p}]$.

(ii) Рассмотрим линейный оператор

$$S_\lambda := \exp(-i\lambda\widehat{D}), \qquad \lambda \in \mathbf{R},$$

и определим

$$S_\lambda^\dagger \widehat{q} S_\lambda := \exp(i\lambda \mathrm{ad}\widehat{D})\widehat{q} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^n}{n!} (\mathrm{ad}\widehat{D})^n \widehat{q}, \tag{1}$$

где

$$(\mathrm{ad}\widehat{D})\widehat{q} := [\widehat{D}, \widehat{q}].$$

Вычислить $S_\lambda^\dagger \widehat{q} S_\lambda$.

(iii) Найти

$$S_\lambda^\dagger \widehat{p} S_\lambda.$$

(iv) Пусть

$$b = \frac{\sqrt{m\omega}}{\sqrt{2}} \left(\widehat{q} + i\frac{\widehat{p}}{m\omega} \right).$$

Тогда

$$b^\dagger = \frac{\sqrt{m\omega}}{\sqrt{2}} \left(\widehat{q} - i\frac{\widehat{p}}{m\omega} \right).$$

Выразить $\widehat{D}$ через b и $b^\dagger$.

(v) Пусть

$$|\lambda\rangle := S_\lambda |0\rangle.$$

Вычислить

$$\langle\lambda|\widehat{q}|\lambda\rangle, \quad \langle\lambda|\widehat{p}|\lambda\rangle, \quad \langle\lambda|\widehat{q}^2|\lambda\rangle, \quad \langle\lambda|\widehat{p}^2|\lambda\rangle.$$

Решение 1. (i) Поскольку

$$[\widehat{q}, \widehat{p}] = iI,$$

получим

$$[\widehat{D}, \widehat{q}] = -i\widehat{q}, \qquad [\widehat{D}, \widehat{p}] = i\widehat{p}.$$

(ii) Используя результаты (i) и определение (1), получим

$$S_\lambda^\dagger \widehat{q} S_\lambda = e^\lambda \widehat{q}.$$

(iii) Используя результаты (i) и определение (1) и заменяя $\widehat{q}$ на $\widehat{p}$, получим

$$S_\lambda^\dagger \widehat{p} S_\lambda = e^{-\lambda} \widehat{p}.$$

(iv) Выразим сначала $\widehat{q}$ и $\widehat{p}$ через b и $b^\dagger$. Используя коммутационное соотношение $[\widehat{q}, \widehat{p}] = iI$, получим

$$\widehat{D} = 2i(b^\dagger b^\dagger - bb).$$

(v) Используя результаты (i)–(iii), получим

$$\begin{aligned}
\langle\lambda|\widehat{q}|\lambda\rangle &= \langle 0|S_\lambda^\dagger \widehat{q} S_\lambda|0\rangle = e^\lambda \langle 0|\widehat{q}|0\rangle = 0,\\
\langle\lambda|\widehat{p}|\lambda\rangle &= \langle 0|S_\lambda^\dagger \widehat{p} S_\lambda|0\rangle = e^{-\lambda} \langle 0|\widehat{p}|0\rangle = 0,\\
\langle\lambda|\widehat{q}^2|\lambda\rangle &= e^{2\lambda}\langle 0|\widehat{q}^2|0\rangle = e^{2\lambda}\frac{1}{2m\omega} = (\Delta q)^2,\\
\langle\lambda|\widehat{p}^2|\lambda\rangle &= e^{-2\lambda}\langle 0|\widehat{p}^2|0\rangle = e^{-2\lambda}\frac{m\omega}{2} = (\Delta p)^2.
\end{aligned}$$

Задача 2. Рассмотрим *оператор сжатия*

$$S(r) := \exp\left(\frac{1}{2} r (b^2 - b^{\dagger 2})\right),$$

где $r \in \mathbf{R}$. Найти

$$S(r)\widehat{q}S(r)^\dagger, \qquad S(r)\widehat{p}S(r)^\dagger,$$

где

$$\widehat{q} := \frac{1}{\sqrt{2}}(b + b^\dagger), \qquad \widehat{p} := -\frac{i}{\sqrt{2}}(b - b^\dagger).$$

Решение 2.

$$S(r)\widehat{q}S(r)^\dagger = e^{-r}\widehat{q}, \qquad S(r)\widehat{p}S(r)^\dagger = e^{r}\widehat{p}.$$

Задача 3. Рассмотрим оператор

$$U(z) := e^{zb_1^\dagger b_2 - \bar{z}b_2^\dagger b_1},$$

где $b_1^\dagger, b_2^\dagger$ — бозе-операторы рождения, и b_1, b_2 — бозе-операторы уничтожения и $z \in \mathbf{C}$. Найти

$$U(z)b_1U(z)^{-1}, \qquad U(z)b_2U(z)^{-1}.$$

Решение 3. Поскольку

$$U^{-1}(z) = e^{-zb_1^\dagger b_2 + \bar{z}b_2^\dagger b_1},$$

то

$$U(z)b_1U(z)^{-1} = \cos(|z|)b_1 - \frac{z\sin(|z|)}{|z|}b_2,$$

$$U(z)b_2U(z)^{-1} = \cos(|z|)b_2 + \frac{\bar{z}\sin(|z|)}{|z|}b_1.$$

Этот результат можно переписать в виде

$$(U(z)b_1U(z)^{-1}, U(z)b_2U(z)^{-1}) = (b_1, b_2)\begin{pmatrix} \cos(|z|) & \dfrac{\bar{z}\sin(|z|)}{|z|} \\ -\dfrac{z\sin(|z|)}{|z|} & \cos(|z|) \end{pmatrix},$$

где матрица справа является элементом группы Ли $SU(2)$.

Задача 4. Рассмотрим оператор

$$U(z) := e^{zb_1^\dagger b_2^\dagger - \bar{z}b_2 b_1},$$

где $b_1^\dagger, b_2^\dagger$ — бозе-операторы рождения, а b_1, b_2 — бозе-операторы уничтожения и $z \in \mathbf{C}$. Вычислить

$$U(z)b_1U(z)^{-1}, \qquad U(z)b_2^\dagger U(z)^{-1}.$$

Решение 4. Поскольку

$$U^{-1}(z) = e^{-zb_1^\dagger b_2^\dagger + \bar{z}b_2 b_1},$$

то

$$U(z)b_1U(z)^{-1} = \operatorname{ch}(|z|)b_1 - \frac{z\operatorname{sh}(|z|)}{|z|}b_2^\dagger,$$

$$U(z)b_2^\dagger U(z)^{-1} = \operatorname{ch}(|z|)b_2^\dagger - \frac{\bar z\operatorname{sh}(|z|)}{|z|}b_1.$$

Этот результат можно переписать в виде

$$(U(z)b_1U(z)^{-1}, U(z)b_2^\dagger U(z)^{-1}) = (b_1, b_2^\dagger)\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(|z|) & -\dfrac{\bar z\operatorname{sh}(|z|)}{|z|} \\ -\dfrac{z\operatorname{sh}(|z|)}{|z|} & \operatorname{ch}(|z|) \end{pmatrix},$$

где матрица справа является элементом группы Ли $SU(1,1)$.

Задача 5. Пусть

$$\widehat{G} := \frac{1}{2}(\zeta b^\dagger b^\dagger - \zeta^* bb).$$

(i) Вычислить коммутаторы

$$[\widehat{G}, b], \qquad [\widehat{G}, [\widehat{G}, b]].$$

(ii) Пусть

$$S(\zeta) := \exp\left(\frac{1}{2}(\zeta b^\dagger b^\dagger - \zeta^* bb)\right) \equiv \exp\widehat{G}.$$

Найти

$$S(\zeta)bS(-\zeta), \qquad S(\zeta)b^\dagger S(-\zeta).$$

Решение 5. (i)

$$[\widehat{G}, b] = \frac{1}{2}\zeta[b^\dagger b^\dagger, b] = -\zeta b^\dagger,$$

$$[\widehat{G}, [\widehat{G}, b]] = [\widehat{G}, -\zeta b^\dagger] = -\zeta[\widehat{G}, b^\dagger] = \zeta^2 b^\dagger.$$

(ii) Используя результаты (i), получим

$$S(\zeta)bS(-\zeta) = (\operatorname{ch}\lambda)b - e^{i\phi}(\operatorname{sh}\lambda)b^\dagger,$$

где $\zeta = \lambda e^{i\phi}$. Аналогично найдем

$$S(\zeta)b^\dagger S(-\zeta) = (\operatorname{ch}\lambda)b^\dagger - e^{-i\phi}(\operatorname{sh}\lambda)b.$$

Задача 6. Рассмотрим линейные операторы

$$K_+ := \frac{1}{2}b^{\dagger 2}, \quad K_- := \frac{1}{2}b^2, \quad K_0 := \frac{1}{2}(b + \frac{1}{2}I),$$
$$A^\dagger := b^\dagger, \quad A := b,$$

где I — тождественный оператор.

(i) Показать, что эти операторы образуют алгебру Ли.

(ii) Рассмотрим

$$P := \zeta K_+ - \zeta^* K_- + \alpha A^\dagger - \alpha^* A,$$

где ζ и α — комплексные числа. Пусть

$$V = e^{\beta K_+} e^{\epsilon A^\dagger} e^{\gamma K_0} e^{\nu I} e^{\delta K_-} e^{\eta A},$$

где β, ϵ, γ, ν, δ и η — комплексные числа. Пусть

$$e^P = V.$$

Найти γ, β, δ, ϵ, η, ν как функции от ζ и α.

Решение 6. (i) Получим

$$[K_0, K_\pm] = \pm K_\pm, \qquad [K_+, K_-] = -2K_0,$$
$$[K_+, A] = -A^\dagger, \qquad [K_-, A^\dagger] = A,$$
$$[K_0, A^\dagger] = \frac{1}{2}A^\dagger, \qquad [K_0, A] = -\frac{1}{2}A, \qquad [A, A^\dagger] = I.$$

Эта алгебра Ли относится к сжатым когерентным состояниям.

(ii) Запишем комплексные числа ζ и α с помощью вещественных чисел λ, μ, θ и ϕ в виде

$$\zeta = \lambda e^{i\theta}, \qquad \alpha = \mu e^{i\phi}.$$

Используем формулу

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[A,B]_n}{n!},$$

где *повторный коммутатор* $[A,B]_n$ имеет вид

$$[A,B]_n := [A,[A,B]_{n-1}]$$

и $[A,B]_0 := B$. Находим

$$e^P A e^{-P} = \mathrm{ch}(\lambda)A - e^{i\theta}\,\mathrm{sh}(\lambda)A^\dagger + \frac{\mu}{\lambda}((\mathrm{ch}(\lambda)-1)e^{i(\theta-\phi)} - \mathrm{sh}(\lambda)e^{i\phi}),$$

$$e^P A^\dagger e^{-P} = \mathrm{ch}(\lambda)A^\dagger - e^{-i\theta}\,\mathrm{sh}(\lambda)A + \frac{\mu}{\lambda}((\mathrm{ch}(\lambda)-1)e^{-i(\theta-\phi)} - \mathrm{sh}(\lambda)e^{-i\phi}).$$

Соответствующие преобразования подобия, порожденные оператором V, имеют вид

$$VAV^{-1} = e^{-\gamma/2}(A - \beta A^\dagger - \epsilon I),$$
$$VA^\dagger V^{-1} = (e^{\gamma/2} - \beta\delta e^{-\gamma/2})A^\dagger + \delta e^{-\gamma/2}A + \eta I - \epsilon\delta e^{-\gamma/2} I.$$

Из равенств

$$e^P A e^{-P} = VAV^{-1}, \qquad e^P A^\dagger e^{-P} = VA^\dagger V^{-1}$$

получим, разделяя члены с $A^\dagger$, A и I:

$$\gamma = -2\ln(\mathrm{ch}(\lambda)),$$
$$\beta = e^{i\theta}\,\mathrm{th}(\lambda),$$
$$\delta = -e^{-i\theta}\,\mathrm{th}(\lambda),$$
$$\epsilon = -\frac{\mu}{\lambda\,\mathrm{ch}(\lambda)}((\mathrm{ch}(\lambda)-1)e^{i(\theta-\phi)} - \mathrm{sh}(\lambda)e^{i\phi}),$$
$$\eta = -\frac{\mu}{\lambda\,\mathrm{ch}(\lambda)}((\mathrm{ch}(\lambda)-1)e^{-i(\theta-\phi)} - \mathrm{sh}(\lambda)e^{-i\phi}).$$

Коэффициент ν нельзя найти с помощью этого метода. Как же определить ν? Можно показать, что

$$\nu = -\frac{\mu^2}{\lambda^2\,\mathrm{ch}(\lambda)}((\mathrm{ch}(\lambda)-1) + i\sin(\theta-2\phi)(\mathrm{sh}(\lambda) - \lambda\,\mathrm{ch}(\lambda))).$$

Глава 17

Запутывание

В своей работе Эйнштейн, Подольский и Розен не использовали спиновый вариант запутывания, точнее, они проводили измерение наблюдаемых положения и импульса двух частиц при одномерном движении. Они рассматривали запутанное состояние

$$|\psi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |p\rangle \otimes |-p\rangle e^{-i\ell p} dp,$$

где первая компонента тензорного произведения относится к частице 1, и вторая к частице 2. Состояние $|\psi\rangle$ является, таким образом, суперпозицией одновременных значений собственных кет-векторов импульсов $\widehat{P}_1$ и $\widehat{P}_2$ двух частиц с соответствующими собственными числами p и $-p$. Таким образом, состояние $|\psi\rangle$ само является собственным кетом

$$\widehat{P}_1 \otimes I + I \otimes \widehat{P}_2$$

с собственным числом 0. Кроме того, $|\psi\rangle$ также является собственным кетом оператора

$$\widehat{Q}_1 \otimes I + I \otimes \widehat{Q}_2,$$

где $\widehat{Q}_1$ и $\widehat{Q}_2$ — положения двух частиц.

Задача 1. Рассмотрим оператор

$$U(r) := e^{-r(b_1^\dagger b_2^\dagger - b_1 b_2)},$$

где $b_1^\dagger, b_2^\dagger$ — бозе-операторы рождения, и b_1, b_2 — бозе-операторы уничтожения и $r \in \mathbf{R}$. Таким образом, $b_1^\dagger = b^\dagger \otimes I$, $b_2^\dagger = I \otimes b^\dagger$. Пусть $|0\rangle \otimes |0\rangle$ — вакуумное состояние, т. е.

$$(b \otimes I)(|0\rangle \otimes |0\rangle) = 0, \qquad (I \otimes b)(|0\rangle \otimes |0\rangle) = 0.$$

(i) Вычислить

$$|\psi(r)\rangle = U(r)(|0\rangle \otimes |0\rangle).$$

(ii) Пусть

$$\widehat{X}_1 := b_1 + b_1^\dagger = b \otimes I + b^\dagger \otimes I, \quad \widehat{Y}_1 := -i(b_1 - b_1^\dagger) = -i(b \otimes I - b^\dagger \otimes I),$$
$$\widehat{X}_2 := b_2 + b_2^\dagger = I \otimes b + I \otimes b^\dagger, \quad \widehat{Y}_2 := -i(b_2 - b_2^\dagger) = -i(I \otimes b - I \otimes b^\dagger).$$

Найти

$$\mathrm{var}(\widehat{X}_1 + \widehat{X}_2), \qquad \mathrm{var}(\widehat{Y}_1 - \widehat{Y}_2),$$

где

$$\mathrm{var}(A) := \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$$

является *дисперсией*.

(iii) Что происходит с состоянием $|\psi(r)\rangle$ при переходе к пределу $r \to \infty$?

Решение 1. (i) Получим

$$|\psi(r)\rangle = U(r)(|0\rangle \otimes |0\rangle) = \sqrt{(1-\lambda^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n |n\rangle \otimes |n\rangle,$$

где $\lambda = \mathrm{th}(r)$ и, следовательно, $\sqrt{1-\lambda^2} = 1/\mathrm{ch}(r)$. Запутывание этого состояния может быть рассмотрено как запутывание между квадратурными фазами в двух модах (ЭПР-запутывание) или как запутывание между числом и фазой в двух модах.

(ii)

$$\mathrm{var}(\widehat{X}_1 + \widehat{X}_2) = 2e^{-2r}, \qquad \mathrm{var}(\widehat{Y}_1 - \widehat{Y}_2) = 2e^{-2r}.$$

(iii) Состояние $|\psi(r)\rangle$ стремится к одновременному собственному состоянию $\widehat{X}_1 + \widehat{X}_2$ и $\widehat{Y}_1 - \widehat{Y}_2$.

Задача 2. Пусть

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \frac{2}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} q_j\right)^2 + \frac{1}{N}\sum_{j,k=1}^{N} (p_j - p_k)^2$$

и

$$g(\mathbf{p},\mathbf{q}) := \frac{2}{N}\left(\sum_{j=1}^{N} p_j\right)^2 + \frac{1}{N}\sum_{j,k=1}^{N}(q_j - q_k)^2.$$

Функция Вигнера чистого запутанного N-модового состояния имеет вид

$$W(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^N \exp\left(-e^{-2r} f(\mathbf{p},\mathbf{q}) - e^{2r} g(\mathbf{p},\mathbf{q})\right), \tag{1}$$

где $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$ и $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ — положения и импульсы N мод, и r — параметр сжатия, одинаковый во всех первоначальных модах. Рассмотреть случай $N = 2$. Что происходит при $r \to \infty$?

Решение 2. Состояние $W(\mathbf{q},\mathbf{p})$ всегда положительно, симметрично между N модами и достигает максимума при $q_i - q_j = 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$ и $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 0$ для больших значений параметра сжатия r. Из (1) получим

$$W(q_1, q_2, p_1, p_2) =$$

$$\frac{4}{\pi^2}\exp\left(-e^{-2r}\left((q_1+q_2)^2 + (p_1-p_2)^2\right) - e^{2r}\left((p_1+p_2)^2 + (q_1-q_2)^2\right)\right).$$

При $r \to \infty$ получим в смысле обобщенных функций

$$C\delta(q_1 - q_2)\delta(p_1 + p_2),$$

где δ означает *дельта-функцию Дирака*. Это состояние связано с исходным ЭПР-состоянием Эйнштейна, Подольского и Розена. Таким образом, при больших r функция W достигает максимума при $q_1 - q_2 = 0$ и $p_1 + p_2 = 0$.

Задача 3. Рассмотрим квантово-механическую систему, определяемую следующим гамильтонианом:

$$\widehat{H} = \hbar\omega_1 b_1^\dagger b_1 + \hbar\omega_2 b_2^\dagger b_2 + \hbar\chi b_1^\dagger b_1 b_2^\dagger b_2,$$

где b_1 и b_2 — бозе-операторы уничтожения для двух различных мод гармонического осциллятора соответственно, и χ — постоянная связи.

Такой гамильтониан для оптических систем описывает процесс четырехволнового взаимодействия, когда константа χ пропорциональна восприимчивости третьего порядка. Он также может быть использован для описания двух различных взаимодействий мод в бозе-конденсате. Кроме того, гамильтониан описывает эффективное взаимодействие выходного поля накачки и зондирующего поля оптического резонатора, связь между которыми обусловлена наличием двухуровневого атома, в предположении отсутствия дисперсии постоянной связи. Пусть

$$|\psi(t=0)\rangle := |\beta_1\rangle \otimes |\beta_2\rangle,$$

где $|\beta_1\rangle$ и $|\beta_2\rangle$ — когерентные состояния.

(i) Найти

$$U(t)|\psi(t=0)\rangle,$$

где

$$U(t) = \exp(-i\widehat{H}t/\hbar).$$

(ii) Рассмотреть частный случай $t = \pi/\chi$. Сделать вывод.

(iii) Рассмотреть четыре случая

a) $\omega_1 = 2\chi$, $\omega_2 = 2\chi$,
b) $\omega_1 = 2\chi$, $\omega_2 = \chi$,
c) $\omega_1 = \chi$, $\omega_2 = 2\chi$,
d) $\omega_1 = \chi$, $\omega_2 = \chi$

для $|\psi(\pi/\chi)\rangle$.

Решение 3. (i)

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\beta_1\rangle\otimes|\beta_2\rangle = e^{-|\beta_1|^2/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\beta_1 e^{-i\omega_1 t})^m}{\sqrt{m}}|m\rangle\otimes|\beta_2 e^{-i\omega_2 t}e^{-i\chi m t}\rangle.$$

(ii) Подставляя $t = \pi/\chi$, получим

$$\exp(-i\chi m t) = \exp(-im\pi) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \text{ четное}, \\ -1, & \text{если } m \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$|\psi(\pi/\chi)\rangle = |\beta_{1+}e^{-i\pi\omega_1/\chi}\rangle \otimes |\beta_2 e^{-i\pi\omega_2/\chi}\rangle + |\beta_{1-}e^{-i\pi\omega_1/\chi}\rangle \otimes |-\beta_2 e^{-i\pi\omega_2/\chi}\rangle$$

или

$$|\psi(\pi/\chi)\rangle = |\beta_1 e^{-i\pi\omega_1/\chi}\rangle \otimes |\beta_{2+} e^{-i\pi\omega_2/\chi}\rangle + |-\beta_1 e^{-i\pi\omega_1/\chi}\rangle \otimes |\beta_{2-} e^{-i\pi\omega_2/\chi}\rangle,$$

где

$$|\epsilon_{\pm} e^{-i\pi\omega_k \chi}\rangle := \frac{1}{2}(|\epsilon e^{-i\pi\omega_k/\chi}\rangle \pm |-\epsilon e^{-i\pi\omega_k/\chi}\rangle)$$

при $k = 1, 2$ и $\epsilon = \beta_1, \beta_2$. Следовательно, состояние является запутанным.

(iii)

Случай a):

$$|\Phi_+\rangle = |\beta_1\rangle \otimes |\beta_{2+}\rangle + |-\beta_1\rangle \otimes |\beta_{2-}\rangle.$$

Случай b):

$$|\Phi_-\rangle = |\beta_1\rangle \otimes |\beta_{2+}\rangle - |-\beta_1\rangle \otimes |\beta_{2-}\rangle.$$

Случай c):

$$|\Psi_+\rangle = |\beta_1\rangle \otimes |\beta_{2-}\rangle + |-\beta_1\rangle \otimes |\beta_{2+}\rangle.$$

Случай d):

$$|\Psi_-\rangle = |\beta_1\rangle \otimes |\beta_{2-}\rangle - |-\beta_1\rangle \otimes |\beta_{2+}\rangle.$$

Эти состояния могут быть рассмотрены в качестве *состояний Белла*. Хотя они не являются полностью ортогональными, для полей большой амплитуды $|\beta_1|, |\beta_2| \gg 1$ ортогональность может быть достигнута приближенно. Кроме того, эти состояния ассиметричны.

Задача 4. Рассмотреть *запутывание* состояния

$$|\Psi\rangle = \sum_s \sum_i \delta(\omega_s + \omega_i - \omega_p)\delta(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) b_s^\dagger(\omega(\mathbf{k}_i)) b_i^\dagger(\omega(\mathbf{k}_i))|0\rangle,$$

которое появляется при *спонтанном параметрическом преобразовании с понижением частоты*. В этом случае ω_j, $\mathbf{k}_j$ $(j = s, i, p)$ — частоты и волновые векторы сигнала (s), холостой моды (i), и накачки (p) соответственно ω_p и $\mathbf{k}_p$ могут считаться константами, в то время как $b_s^\dagger$ и $b_i^\dagger$ — это соответствующие бозе-операторы рождения сигнальной и холостой мод.

Решение 4. Запутывание этого состояния можно представить как суперпозицию бесконечного числа двухфотонных состояний, для которых при спонтанном параметрическом рассеянии для сигнального и холостого фотонов выполняются законы сохранения энергии и импульса

(что обеспечивается наличием дельта-функции)

$$\hbar\omega_s + \hbar\omega_i = \hbar\omega_p, \qquad \hbar\mathbf{k}_s + \hbar\mathbf{k}_i = \hbar\mathbf{k}_p.$$

Даже если не существует точных сведений об импульсе для сигнального или холостого фотонов, состояние даст точную информацию о корреляции импульсов пары. На ЭПР языке, импульсы сигнального и холостого фотонов не определены. Однако, если измерение одного из фотонов даст определенное значение, то импульс и другого фотона будет определен.

Задача 5. Рассмотрим функцию

$$G(x_1, x_2; r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 e^{2r} - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 e^{-2r}\right),$$

где $r > 0$ — параметр сжатия. Найти

$$\lim_{r\to\infty} (G(x_1, x_2; r), \phi(x_1, x_2))$$

в смысле обобщенных функций, где $\phi \in S(\mathbf{R}^2)$. В данном случае $S(\mathbf{R}^2)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых функций, которые убывают при $|\mathbf{x}| \to \infty$ вместе со всеми своими производными быстрее, чем любая степень $|\mathbf{x}|^{-1}$.

Решение 5. В пределе

$$\lim_{r\to\infty} (G(x_1, x_2; r), \phi(x_1, x_2)) \to \phi(x_1, x_1).$$

Поэтому

$$\lim_{r\to\infty} G(x_1, x_2; r) \to \delta(x_1 - x_2)$$

в смысле обобщенных функций, где δ — дельта-функция Дирака.

Задача 6. Рассмотрим оператор

$$U_\lambda = \exp(\lambda(b_1^\dagger b_2 - b_2^\dagger b_1)), \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

(i) Найти

$$U_\lambda^\dagger b_1 U_\lambda, \qquad U_\lambda^\dagger b_2 U_\lambda.$$

(ii) Рассмотреть частный случай $\lambda = \pi/4$.

(iii) Найти

$$D = U^{\dagger}_{\pi/4}(b^{\dagger}_1 b_1 - b^{\dagger}_2 b_2)U_{\pi/4}.$$

(iv) Решить задачу о собственных значениях $D|\delta\rangle = d|\delta\rangle$.

Решение 6. (i) Используя разложение

$$e^{\widehat{A}}\widehat{B}e^{-\widehat{A}} = \widehat{B}+[\widehat{A},\widehat{B}]+\frac{1}{2}[\widehat{A},[\widehat{A},\widehat{B}]]+\ldots+\frac{1}{n!}[\widehat{A},[\widehat{A},\ldots,[\widehat{A},\widehat{B}]\ldots]]+\ldots,$$

получим

$$U^{\dagger}_{\lambda}b_1U_{\lambda} = b_1\cos(\lambda)+b_2\sin(\lambda), \qquad U^{\dagger}_{\lambda}b_2U_{\lambda} = -b_1\sin(\lambda)+b_2\cos(\lambda).$$

(ii) При $\lambda = \pi/4$

$$U^{\dagger}_{\pi/4}b_1U_{\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_2+b_1), \qquad U^{\dagger}_{\pi/4}b_2U_{\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_2-b_1),$$

поскольку $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.

(iii) Используя результаты (ii), получим

$$U^{\dagger}_{\lambda}b^{\dagger}_1U_{\lambda} = b^{\dagger}_1\cos(\lambda)+b^{\dagger}_2\sin(\lambda), \qquad U^{\dagger}_{\lambda}b^{\dagger}_2U_{\lambda} = -b^{\dagger}_1\sin(\lambda)+b^{\dagger}_1\cos(\lambda).$$

Таким образом,

$$D = b^{\dagger}_1 b_2 + b_1 b^{\dagger}_2.$$

(iv) Задачу о собственных значениях

$$D|\delta\rangle = d|\delta\rangle$$

можно переписать в виде

$$(b^{\dagger}_1 b_1 - b^{\dagger}_2 b_2)|\nu\rangle = d|\nu\rangle,$$

где

$$|\nu\rangle = U_{\pi/4}|\delta\rangle.$$

Эта задача может быть легко разрешена, поскольку $b^{\dagger}b|n\rangle = n|n\rangle$. Получим

$$|\nu^{(n)}\rangle = \begin{cases} |n+d\rangle\otimes|n\rangle & d\in\mathbf{Z}^+ \\ |n\rangle\otimes|n\rangle & d=0 \\ |n\rangle\otimes|n-d\rangle & d\in\mathbf{Z}^- \end{cases},$$

где через $\mathbf{Z}^+$ обозначено множество положительных целых чисел, и через $\mathbf{Z}^-$ — множество отрицательных целых чисел. Собственное число d имеет счетную кратность вырождения, соответствующую совокупности собственных состояний $|\nu^{(n)}\rangle$, зависящих от целочисленных параметров. Чтобы вычислить исходные собственные значения, необходимо вычислить их преобразование под действием оператора $U_{\pi/4}$, т. е.

$$|\delta^{(n)}\rangle = U^\dagger_{\pi/4}|\nu^{(n)}\rangle.$$

Рассмотрим *двухбозонную реализацию Швингера* алгебры Ли $SU(2)$

$$J_+ := b_1 b_2^\dagger, \qquad J_- := b_1^\dagger b_2, \qquad J_3 := \frac{1}{2}(b_2^\dagger b_2 - b_1^\dagger b_1),$$

где

$$[J_+, J_-] = 2J_3, \qquad [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm.$$

Таким образом,

$$U_{\pi/4} = \exp\left(\frac{\pi}{4}(J_+ - J_-)\right).$$

Используя формулу Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа, получим

$$\exp(\xi J_+ - \bar{\xi} J_-) = \exp(\eta J_+)\exp(\beta J_3)\exp(-\bar{\eta} J_-),$$

где

$$\eta = \frac{\xi}{|\xi|}\operatorname{tg}(\xi), \qquad \beta = \ln(1 + |\eta|^2).$$

Таким образом, учитывая, что $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, получим

$$U_{\pi/4} = \exp(b_1 b_2^\dagger)\exp(\ln 2(b_2^\dagger b_2 - b_1^\dagger b_1))\exp(-b_1^\dagger b_2).$$

Задача 7. Рассмотрим гамильтониан

$$\widehat{H} = \sum_{i,j=0}^{N-1} h_{ij} b_i^\dagger b_j + \sum_{i,j,l,m=0}^{N-1} V_{ijlm} b_i^\dagger b_j^\dagger b_m b_l.$$

Операторы $b_j^\dagger$ являются бозе-операторами рождения, и b_j — бозе-операторами уничтожения.

Показать, что либо собственное состояние $|\psi\rangle$ гамильтониана $\widehat{H}$ является запутанным, либо $[\widehat{H}, \widehat{n}]|\psi\rangle = 0$, где $\widehat{n} := b^\dagger b$ — оператор числа частиц моды j для подходящего базиса.

Решение 7. Предположим, что состояние $|\psi\rangle$ не является запутанным. Распишем $|\psi\rangle$ в виде

$$|\psi\rangle = |n_0\rangle \otimes \ldots \otimes |n_{N-1}\rangle,$$

где $\{\,|0_j\rangle, |1_j\rangle, \ldots\,\}$ — базис для частиц в моде j, где $0 \leqslant j < N$. Введем для частиц в моде j операторы рождения, уничтожения и числа частиц

$$\begin{aligned} b_j^\dagger|n_j\rangle &:= \sqrt{n_j}|n+1_j\rangle, \\ b_j|n_j\rangle &:= \sqrt{n_j}|n-1_j\rangle, \\ \widehat{n}_j &:= b_j^\dagger b_j. \end{aligned}$$

Получим характеристическое уравнение для состояния $|\psi\rangle$

$$\widehat{H}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle.$$

Преобразовывая выражение, получим

$$\begin{aligned} [\widehat{H}, \widehat{n}_i]|\psi\rangle &= \widehat{H}\widehat{n}_i|\psi\rangle - \widehat{n}_i\widehat{H}|\psi\rangle \\ &= \widehat{H}n_i|\psi\rangle - \lambda\widehat{n}_i|\psi\rangle \\ &= n_i\widehat{H}|\psi\rangle - \lambda\widehat{n}_i|\psi\rangle \\ &= \lambda n_i|\psi\rangle - \lambda n_i|\psi\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Задача 8. Пусть $|\beta\rangle$ — когерентное состояние. Рассмотрим запутанное когерентное состояние

$$|\psi\rangle = C(|\beta_1\rangle \otimes |\beta_2\rangle + e^{i\phi}|-\beta_1\rangle \otimes |-\beta_2\rangle),$$

где C — нормирующий множитель и $\phi \in \mathbf{R}$.

(i) Найти нормирующий множитель C.

(ii) Вычислить *частичный след*, используя базис $\{|n\rangle \otimes I\, :\, n = 0, 1, 2, \ldots\}$, где $\{|n\rangle \colon n = 0, 1, 2, \ldots\}$ — состояния с определенным числом частиц, и I — тождественный оператор.

Решение 8. (i) Поскольку

$$\langle\beta|\gamma\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}(|\beta|^2 + |\gamma|^2) + \beta\gamma^*\right)$$

для когерентных состояний $|\beta\rangle$ и $|\gamma\rangle$, получим

$$\langle\beta|\beta\rangle = 1, \qquad \langle\beta| - \beta\rangle = \exp(-2|\beta|^2).$$

Из условия $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ следует, что

$$1 = |C|^2(2 + 2\cos(\phi)\exp(-2|\beta_1|^2 - 2|\beta_2|^2)).$$

Таким образом,

$$C = \frac{1}{\sqrt{2 + 2\cos(\phi)\exp(-2|\beta_1|^2 - 2|\beta_2|^2)}}.$$

(ii) Необходимо вычислить величину

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_1(|\psi\rangle\langle\psi|) = C^2 \sum_{n=0}^{\infty} &((\langle n| \otimes I)(|\beta_1\rangle \otimes |\beta_2\rangle + e^{i\phi}| - \beta_1\rangle \otimes | - \beta_2\rangle) \\ &\times(\langle\beta_1| \otimes \langle\beta_2| + e^{-i\phi}\langle\beta_1 - | \otimes \langle\beta_2 - |)(|n\rangle \otimes I)).\end{aligned}$$

Преобразовывая это выражение, получим

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}_1(|\psi\rangle\langle\psi|) \\ &= C^2 \sum_{n=0}^{\infty}((\langle n|\beta_1\rangle\langle\beta_1|n\rangle|\beta_2\rangle\langle\beta_2| + e^{-i\phi}\langle n|\beta_1\rangle\langle\beta_1 - |n\rangle|\beta_2\rangle\langle\beta_2 - | \\ &\quad + e^{i\phi}\langle n| - \beta_1\rangle\langle\beta_1|n\rangle| - \beta_2\rangle\langle\beta_2| + \langle n| - \beta_1\rangle\langle\beta_1 - |n\rangle| - \beta_2\rangle\langle\beta_2 - |).\end{aligned}$$

Используя соотношения

$$\langle n|\beta_1\rangle\langle\beta_1|n\rangle = \frac{e^{-|\beta_1|^2}(|\beta_1|^2)^n}{n!},$$

$$\langle n|\beta_1\rangle\langle\beta_1 - |n\rangle = \frac{e^{-|\beta_1|^2}(-|\beta_1|^2)^n}{n!},$$

$$\langle n| - \beta_1\rangle\langle\beta_1|n\rangle = \frac{e^{-|\beta_1|^2}(-|\beta_1|^2)^n}{n!},$$

$$\langle n| - \beta_1\rangle\langle\beta_1 - |n\rangle = \frac{e^{-|\beta_1|^2}(|\beta_1|^2)^n}{n!}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\beta|^2)^n}{n!} = e^{|\beta|^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-|\beta|^2)^n}{n!} = e^{-|\beta|^2},$$

находим выражение для следа

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_1(|\psi\rangle\langle\psi|) = {} & C^2(|\beta_2\rangle\langle\beta_2| + e^{i\phi}e^{-2|\beta_1|^2}|\beta_2\rangle\langle\beta_2 - | \\ & + e^{-i\phi}e^{-2|\beta_1|^2}| - \beta_2\rangle\langle\beta_2| + | - \beta_2\rangle\langle\beta_2 - |). \end{aligned}$$

Задача 9. *Светоделитель* — это простое устройство, которое может использоваться для запутывания выходных оптических полей. На входное поле, описываемое бозе-оператором уничтожения b_1, с помощью симметричного светоделителя без потерь с амплитудными коэффициентами отражения и прозрачности r и t накладывается другое входное поле с бозе-оператором уничтожения b_2. Операторы уничтожения выходных полей имеют вид

$$\widetilde{b}_1 = \widehat{B} b_1 \widehat{B}^\dagger, \qquad \widetilde{b}_2 = \widehat{B} b_2 \widehat{B}^\dagger,$$

где *оператор светоделителя* равен

$$\widehat{B} := \exp\left(\frac{\theta}{2}(b_1^\dagger b_2 e^{i\phi} - b_1 b_2^\dagger e^{-i\phi})\right)$$

с амплитудными коэффициентами отражения и прозрачности, равными

$$t := \cos\frac{\theta}{2}, \qquad r := \sin\frac{\theta}{2}.$$

Светоделитель устанавливает фазовый угол ϕ между отраженным и проходящим полями.

(i) Предположим, что входные состояния являются двумя независимыми состояниями с определенным числом частиц $|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$, где $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots$. Вычислить

$$\widehat{B}(|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle).$$

(ii) Рассмотреть частный случай $n_1 = 0$ и $n_2 = N$.

Решение 9. (i) Получим

$$\widehat{B}(|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle) = \sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty} ((\langle m_1| \otimes \langle m_2|)\widehat{B}(|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle))|m_1\rangle \otimes |m_2\rangle$$
$$= \sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty} B_{n_1 n_2}^{m_1 m_2}|m_1\rangle \otimes |m_2\rangle,$$

где

$$B_{n_1 n_2}^{m_1 m_2} = e^{-i\phi(n_1-m_1)}\sum_{k=0}^{n_1}\sum_{\ell=0}^{n_2}(-1)^{n_1-k} r^{n_1+n_2-k-\ell} t^{k+\ell}$$
$$\times \frac{\sqrt{n_1!n_2!m_1!m_2!}}{k!(n_1-k)!\ell!(n_2-\ell)!}\delta_{m_1,n_2+k-\ell}\delta_{m_2,n_1-k+\ell}$$

и $\delta_{m,n}$ — символ Кронекера. Если общее число входных фотонов равно $N = n_1+n_2$, выходное состояние становится $(N+1)$-мерным запутанным состоянием.

(ii) Используя результаты (i), получим

$$B(|0\rangle \otimes |N\rangle) = \sum_{k=0}^{N} c_k^N |k\rangle \otimes |N-k\rangle,$$

где коэффициенты разложения имеют вид

$$c_k^N = \binom{N}{k}^{1/2} r^k t^{N-k} e^{ik\phi}.$$

Задача 10. Описать различные типы запутывания фотонов.

Решение 10. Существуют различные способы, с помощью которых можно запутать фотоны. Можно выбрать любой из следующих:

a) запутывание поляризации,

b) запутывание импульса,

c) временно-энергетическое запутывание,

d) запутывание состояний орбитального импульса.

Запутывание поляризации. Наиболее высокий контраст в экспериментах может быть достигнут для состояний с запутанной поляризацией, создаваемых с помощью параметрического преобразования с понижением частоты. Источники с синхронизмом второго типа могут генерировать запутывание поляризации напрямую. Параметрическое преобразование с понижением частоты или спонтанное параметрическое свечение является спонтанным обращенным процессом генерации второй гармоники или, в более общем случае, трехволновым смешиванием в нелинейной оптической среде (например, кристалле бета-бората бария (BBO)). Нелинейная оптика описывается с помощью поляризации $\mathbf{P}$, которая является нелинейной функцией от электрического поля $\mathbf{E}$. Нелинейность можно описать с помощью разложения вектора поляризации в степенной ряд по компонентам электрического поля (используется правило суммирования по повторяющимся индексам):

$$P_i = \chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \ \ldots,$$

где $\chi_{ij}^{(1)}$ описывает свойства материала, связанные с обычным коэффициентом преломления, включая любой тип двойного лучепреломления, $\chi_{ijk}^{(2)}$ — тензорный коэффициент для трех-волнового взаимодействия (некоторые две проекции электрического поля E, смешиваясь в сильно нелинейном материале, могут привести к некоторой третьей проекции вектора поляризации P). Член $\chi_{ijkl}^{(3)}$ описывает эффекты, которые появляются при еще больших интенсивностях, например при фокусировке Керра или обращении волнового фронта.

При параметрическом рассеянии с понижением частоты речь идет о высокочастотном поле накачки и двух возникающих низкочастотных полях. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2,$$

тогда как фазовый синхронизм описывается соотношением

$$\hbar\mathbf{k}_p = \hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2.$$

Поскольку большинство нелинейных материалов является двоякопреломляющими, второй критерий может быть выполнен при надлежащем выборе среза. С его помощью можно управлять коэффициентами преломления, и следовательно и скоростями волн, так что свет может испускаться в определенных направлениях. В случае спонтанного параметрического рассеяния с фазовым синхронизмом второго типа пучок накачки падает на нелинейный оптический кристалл (например, BBO). В кристалле фотоны накачки могут с некоторой малой вероятностью самопроизвольно расщепляться на два ортогонально поляризованных фотона, называемых сигнальным и холостым фотонами. Законы сохранения энергии и импульса требуют, чтобы длина волны и направления излучения фотонов после преобразования с понижением частоты были жестко связаны. Они зависят от длины волны накачки, и также от угла между оптической осью кристалла и пучком накачки. В вырожденном случае (сигнальный и холостой фотоны имеют одинаковую длину волны) фотоны покидают кристалл симметрично относительно пучка накачки вдоль двух конусов. При определенных ориентациях оптического кристалла два конуса излучения пересекаются и фотоны, испускаемые вдоль направлений пересечения, больше не могут быть сопоставлены одному из двух ортогонально поляризованных конусов, создавая тем самым запутанную по поляризации пару. Запутанное состояние поляризации (состояние Белла) имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle \otimes |v\rangle + e^{i\phi}|v\rangle \otimes |h\rangle),$$

где h и v означают горизонтальную и вертикальную поляризации света. Используя только стандартные оптические элементы в одном из двух исходящих пучков, можно преобразовать любое из состояний Белла в любое другое состояние.

Состояния фотонов, запутанные по энергии, после преобразования с понижением частоты являются наиболее универсальными, так как они существуют для любой пары фотонов. Поскольку существует много способов разделения энергии фотона накачки, каждый дочерний фотон имеет широкий спектр и, следовательно, узкий волновой пакет во времени. Однако сумма энергий двух дочерних фотонов вполне определена, так как они должны приводить к энергии фотона лазера монохроматической накачки. Эта взаимосвязь представляется следующим запутанным по энергии состоянием:

$$|\psi\rangle = \int_0^{E_p} dE A(E)|E\rangle_s \otimes |E_p - E\rangle_i$$

где каждый кет-вектор описывает энергию одного из фотонов, s и i означают сигнальный и холостой фотон соответственно, и $A(E)$ — это, по существу, спектральное распределение собранного света, преобразованного с понижением частоты.

Помимо запутывания энергии, следующее распространенное запутывание, получаемое с помощью преобразования с понижением частоты, — это запутывание направлений импульса. При пропускании излучения от преобразователя с понижением частоты через малые отверстия на экране извлекаются две пары пространственных мод (различающихся направлением импульсов). Пары фотонов испускаются таким образом, что всякий раз, когда фотон излучается в одной из двух внутренних мод, его фотон-напарник окажется в противоположной внешней моде вследствие фазового синхронизма в кристалле. Суперпозиция двух внутренних и двух внешних мод на светоделителе служит для того, чтобы измерять скорости совпадений в той или иной суперпозиции начальных пространственных мод. После прохождения светоделителя не существует способа отделить две верхние моды от двух нижних и, следовательно, в скоростях совпадений будет наблюдаться интерференция.

В дискретном варианте (запутывание по времени прихода импульсов) для источников состояний, запутанных по энергии и времени, через кристалл преобразования с понижением частоты посылается двойной импульс. Если задержка между двумя импульсами накачки равна разнице во времени между коротким и длинным плечом интерферометра Маха–Цандера, то вновь существует два неразличимых способа обнаружения совпадения.

Глава 18

Телепортация

Квантовые непрерывные переменные предоставляют новый подход к обработке квантовой информации и квантовой связи. С их помощью описываются сильновозбужденные квантовые системы, такие как многофотонные световые поля. Введение непрерывных переменных дает дополнительные преимущества над однофотонной системой. Их применение включает в себя использование высокоэффективных фотодиодов связи. Кроме того, когерентные источники непрерывного запутывания являются на порядки более эффективными, чем спонтанные. Схемы телепортации можно продемонстрировать, используя источники яркого света.

Задача 1. Пусть $|\beta\rangle$ — когерентное состояние, а b и $b^\dagger$ — бозе-операторы уничтожения и рождения соответственно. Введем *оператор сдвига*

$$D(\mu) := \exp(\mu b^\dagger - \mu^* b), \qquad \mu \in \mathbf{C}.$$

Рассмотрим состояние, образованное следующей суммой тензорных произведений

$$|\psi\rangle := \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbf{C}} d^2\beta |\beta\rangle \otimes |\beta^*\rangle.$$

Это максимально запутанное состояние в непрерывных переменных. Это состояние не нормировано. При телепортации предполагается, что неизвестное состояние $|\phi\rangle$ находится в моде 1, отправляющая сторона квантового канала в моде 2, и получающая сторона — в моде 3. Вычислить

$$({}_{12}\langle\psi| \otimes I_3)(D_1^\dagger(\mu) \otimes I_2 \otimes I_3)(|\phi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_{23}),$$

где I_2 — тождественный оператор, действующий на моде 2, I_3 — тождественный оператор, действующий на моде 3, а $D_1^\dagger$ указывает на то, что оператор действует на моде 1.

Решение 1. Используя соотношение полноты когерентных состояний

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbf{C}} d^2\beta|\beta\rangle\langle\beta| = I$$

и учитывая, что $I|\beta\rangle = |\beta\rangle$, получим

$$|\gamma\rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbf{C}} d^2\beta|\beta\rangle\langle\beta|\gamma\rangle.$$

Используя это разложение и тождество

$$\langle\gamma|\beta\rangle = \langle\beta^*|\gamma^*\rangle,$$

получим

$$\begin{aligned}
&({}_{12}\langle\psi| \otimes I_3)(D_1^\dagger(\mu) \otimes I_2 \otimes I_3)(|\phi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_{23}) \\
&= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\mathbf{C}}\int\limits_{\mathbf{C}} d^2\beta d^2\gamma\langle\gamma|D^\dagger(\mu)|\phi\rangle\langle\gamma^*|\beta\rangle|\beta^*\rangle_3 \\
&= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\mathbf{C}}\int\limits_{\mathbf{C}} d^2\beta d^2\gamma\langle\beta^*|\gamma\rangle\langle\gamma|D^\dagger(\mu)|\phi\rangle|\beta^*\rangle_3 \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbf{C}} d^2\beta\langle\beta^*|D^\dagger(\mu)|\phi\rangle|\beta^*\rangle_3 \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbf{C}} d^2\beta|\beta^*\rangle\langle\beta^*|D_3^\dagger(\mu)|\phi\rangle_3 \\
&= D_3^\dagger(\mu)|\phi\rangle_3.
\end{aligned}$$

При выводе использовалось тождество

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbf{C}} d^2\gamma\langle\beta^*|\gamma\rangle\langle\gamma|D^\dagger(\mu)|\phi\rangle = \langle\beta^*|D^\dagger(\mu)|\phi\rangle.$$

Отсюда следует, что после совместного измерения состояние отправителя проектируется на состояние, которое является унитарно преобразованным неизвестным состоянием. После получения результатов измерения μ получатель получает обратно неизвестное состояние, используя соответствующее унитарное преобразование $D(\mu)$.

Глава 19

Обмен и клонирование

Обмен и клонирование могут быть изучены не только в случае конечномерных систем, но и в случае непрерывных переменных. Исследуем, могут ли когерентные состояния подвергнуться обмену или клонированию.

Задача 1. Можно ли поменять два когерентных состояния, т. е. можно ли найти унитарное преобразование (*оператор обмена*) такое, что справедливо соотношение

$$U_{swap}(|\beta_1\rangle \otimes |\beta_2\rangle) = |\beta_2\rangle \otimes |\beta_1\rangle?$$

Рассмотреть унитарный оператор

$$U(z) := e^{zb_1^\dagger b_2 - z^* b_1 b_2^\dagger}, \qquad z \in \mathbf{C}.$$

Решение 1. Действительно, такой оператор обмена можно найти. Используя введенный унитарный оператор, получим

$$U(z)(|0\rangle \otimes |0\rangle) = |0\rangle \otimes |0\rangle.$$

Тогда

$$\begin{aligned} U(z)|\beta_1\rangle \otimes |\beta_2\rangle &= U(z)D(\beta_1) \otimes D(\beta_2)|0\rangle \otimes |0\rangle \\ &= U(z)D_1(\beta_1)D_2(\beta_2)U^{-1}(z)|0\rangle \otimes |0\rangle, \end{aligned}$$

где $D(\beta)$ — оператор сдвига. Таким образом,

$$U(z)D_1(\beta_1)D_2(\beta_2)U^{-1}(z) = U(z)\exp(\beta_1 b_1^\dagger - \beta_1^* b_1 + \beta_2 b_2^\dagger - \beta_2^* b_2)U(z)^{-1}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}U(z)D_1(\beta_1)D_2(\beta_2)U^{-1}(z) &= \exp(\beta_1(U(z)b_1U(z)^{-1})^\dagger - \beta_1^*(U(z)b_1U(z)^{-1})\\&\quad+\beta_2(U(z)b_2U(z)^{-1})^\dagger - \beta_2^*(U(z)b_2U(z)^{-1}))\\&\equiv \exp(X).\end{aligned}$$

Вычисляя унитарные преобразования под знаком экспоненты, получим

$$\begin{aligned}X &= \left(\cos(|z|)\beta_1 + \frac{z\sin(|z|)}{|z|}\beta_2\right)b_1^\dagger - \left(\cos(|z|)\beta_1^* + \frac{z^*\sin(|z|)}{|z|}\beta_2^*\right)b_1\\&\quad+\left(\cos(|z|)\beta_2 - \frac{z^*\sin(|z|)}{|z|}\beta_1\right)b_2^\dagger - \left(\cos(|z|)\beta_2^* - \frac{z\sin(|z|)}{|z|}\beta_1^*\right)b_2.\end{aligned}$$

Подставляя X, получим

$$\begin{aligned}\exp(X) &= D_1\left(\cos(|z|)\beta_1 + \frac{z\sin(|z|)}{|z|}\beta_2\right)D_2\left(\cos(|z|)\beta_2 - \frac{z^*\sin(|z|)}{|z|}\beta_1\right)\\&= D\left(\cos(|z|)\beta_1 + \frac{z\sin(|z|)}{|z|}\beta_2\right)\otimes D\left(\cos(|z|)\beta_2 - \frac{z^*\sin(|z|)}{|z|}\beta_1\right).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\beta_1\rangle\otimes|\beta_2\rangle \to |\cos(|z|)\beta_1 + \frac{z\sin(|z|)}{|z|}\beta_2\rangle\otimes|\cos(|z|)\beta_2 - \frac{z^*\sin(|z|)}{|z|}\beta_1\rangle.$$

Представим z в виде $z = |z|e^{i\delta}$, тогда

$$|\beta_1\rangle\otimes|\beta_2\rangle \to |\cos(|z|)\beta_1 + e^{i\delta}\sin(|z|)\beta_2\rangle\otimes|\cos(|z|)\beta_2 - e^{-i\delta}\sin(|z|)\beta_1\rangle.$$

Положив $\sin(|z|) = 1$, получим

$$|\beta_1\rangle\otimes|\beta_2\rangle \to |e^{i\delta}\beta_2\rangle\otimes|-e^{-i\delta}\beta_1\rangle = |e^{i\delta}\beta_2\rangle\otimes|e^{-i(\delta+\pi)}\beta_1\rangle. \qquad (1)$$

Применим унитарный оператор

$$V = e^{-i\delta b_1^\dagger b_1}e^{i(\delta+\pi)b_2^\dagger b_2} = e^{-i\delta b^\dagger b}\otimes e^{i(\delta+\pi)b^\dagger b}$$

слева:

$$|\beta_1\rangle \otimes |\beta_2\rangle \to |\beta_2\rangle \otimes |\beta_1\rangle.$$

Подставляя $\beta_1 = \beta$ и $\beta_2 = 0$ в (1), получим

$$|\beta\rangle \otimes |0\rangle = |\cos(|z|)\beta\rangle \otimes |-e^{-i\delta}\sin(|z|)\beta\rangle = |\cos(|z|)\beta\rangle \otimes |e^{-i(\delta+\pi)}\sin(|z|)\beta\rangle.$$

Задача 2. Когерентные состояния не могут быть *клонированы*, т. е. нельзя найти унитарный оператор, который вводит соответствие

$$|\beta\rangle \otimes |0\rangle \to |\beta\rangle \otimes |\beta\rangle.$$

Используя результаты задачи 1 (соотношение (1))

$$|\beta\rangle \otimes |0\rangle \to |\cos(|z|)\beta\rangle \otimes |e^{-i(\delta+\pi)}\sin(|z|)\beta\rangle, \tag{1}$$

найти аппроксимацию.

Решение 2. Применяя оператор

$$I \otimes e^{i(\delta+\pi)b^\dagger b}$$

к правой части (1), получим

$$|\cos(|z|)\beta\rangle \otimes |\sin(|z|)\beta\rangle.$$

Подставим $|z| = \pi/4$, тогда

$$|\beta\rangle \otimes |0\rangle \to |\frac{\beta}{\sqrt{2}}\rangle \otimes |\frac{\beta}{\sqrt{2}}\rangle.$$

Эта операция называется *несовершенным клонированием*.

Задача 3. В данной задаче работа ведется с тремя бесконечномерными гильбертовыми пространствами $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ и гильбертовым пространством произведения $\mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, где $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_3$. Рассмотрим гетеродинный токовый оператор $Z := b_1 + b_2^\dagger$, где бозе-оператор уничтожения действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_1$, и бозе-оператор рождения $b_2^\dagger$ действует на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_2$. Тогда $[Z, Z^\dagger] = 0$

и характеристическое уравнение имеет вид $Z|z\rangle\rangle_{12} = z|z\rangle\rangle_{12}$, где $z \in \mathbf{C}$. Собственные состояния $|z\rangle\rangle$ определяются с помощью соотношения

$$|z\rangle\rangle_{12} = D_1(z)|0\rangle\rangle_{12} = D_2(z^*)|0\rangle\rangle_{12},$$

где через D_1 обозначен оператор сдвига для моды 1, а через D_2 — оператор сдвига для моды 2 и

$$|0\rangle\rangle_{12} := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n |n\rangle_1 \otimes |n\rangle_2$$

в фоковском базисе (базисе состояний с определенным числом частиц). Выражение

$$_{32}\langle\langle z|z'\rangle\rangle_{12} = \frac{1}{\pi} D_1(z') T_{13} D_3^\dagger(z),$$

где

$$T_{13} := \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle_{13}\langle n| \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (|n\rangle \otimes I \otimes I)(I \otimes I \otimes \langle n|),$$

определяет оператор переноса, который, очевидно, удовлетворяет соотношению $T_{13}|\psi\rangle_3 = |\psi\rangle_1$ для любого вектора $|\psi\rangle$. При операции клонирования рассмотрим входное состояние в гильбертовом пространстве произведений $\mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle_3 \otimes \int\limits_{\mathbf{C}} d^2 z f(z, z*) |z\rangle\rangle_{12},$$

где $|\phi\rangle_3$ — исходное состояние в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_3$, которое необходимо склонировать в само $\mathcal{H}_3$ и в $\mathcal{H}_1$. Преобразование клонирования осуществляется с помощью унитарного оператора

$$U = \exp\left(\left(\frac{1}{2}(b_3 + b_3^\dagger) + \frac{1}{2}(b_3 - b_3^\dagger)\right) Z^\dagger - \left(\frac{1}{2}(b_3 + b_3^\dagger - \frac{1}{2}(b_3 - b_3^\dagger\right) Z\right),$$

где $Z = b_1 + b_2^\dagger$. Пусть $|\psi\rangle_{out} = U|\psi\rangle$.

(i) Вычислить матрицу плотности ρ_3, ограниченную одним гильбертовым пространством и соответствующую состоянию $|\psi\rangle_{out}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}_3$.

(ii) Вычислить матрицу плотности ρ_1, ограниченную одним гильбертовым пространством и соответствующую состоянию $|\psi\rangle_{out}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}_1$.

(iii) Сравнить две матрицы плотности.

Решение 3. Пусть $|w\rangle\rangle_{12}$ — собственное состояние оператора Z. Матрица плотности имеет вид $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. То есть чтобы получить частичный след, необходимо вычислить величину

$$\rho_3 = \int\limits_{\mathbf{C}} d^2 w \int\limits_{\mathbf{C}} d^2 z \int\limits_{\mathbf{C}} d^2 z' f(z, z^*) f^*(z', z'^*)$$
$$\times {}_{12}\langle\langle w|D_3^\dagger(z)|\phi\rangle_{33}\langle\phi|D_3(z') \otimes |z\rangle\rangle_{1212}\langle\langle z'|w\rangle\rangle_{12}.$$

Используя свойство полноты и ортогональности собственных состояний $|w\rangle\rangle$ оператора Z, получим

$$\rho_3 = \int\limits_{\mathbf{C}} d^2 z |f(z, z^*)|^2 D_3^\dagger(z)|\phi\rangle_{33}\langle\phi|D_3(z).$$

(ii) Необходимо вычислить величину

$$\rho_1 = \int\limits_{\mathbf{C}} d^2 w \int\limits_{\mathbf{C}} \frac{d^2 z}{\pi} \int\limits_{\mathbf{C}} \frac{d^2 z'}{\pi} f(z, z^*) f^*(z', z'^*)$$
$$\times D_1(z) T_{13}(D_3^\dagger(w) D_3^\dagger(z)|\phi\rangle_{33}\langle\phi|D_3(z') D_3(w)) T_{31} D_3^\dagger(z').$$

Используя свойство полноты и ортогональности собственных состояний $|w\rangle\rangle$ оператора Z, получим

$$\rho_1 = \int\limits_{\mathbf{C}} d^2 w |\widetilde{f}(w, w^*)|^2 D_1^\dagger(w)|\phi\rangle_{11}\langle\phi|D_1(z),$$

где $\widetilde{f}(w, w^*)$ означает *преобразование Фурье* на комплексной плоскости

$$\widetilde{f}(w, w^*) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbf{C}} d^2 z e^{wz^* - w^* z} f(z, z^*).$$

(iii) При

$$f(z, z^*) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-|z|^2}$$

получаются два идентичных клона, т. е. $\rho_3 = \rho_1$, которые определяются начальным состоянием $|\psi\rangle$, размытым при помощи гауссова шума.

Глава 20

Гамильтонианы

Большинство экспериментальных реализаций квантовых логических вентилей (вентиль Адамара, квантовый фазовый вентиль, вентиль контролируемого NOT) оперируют с несколькими кубитами и состояниями с определенным числом частиц (фоковскими состояниями). Гамильтониан $\widehat{H}$ должен описывать взаимодействие. Поэтому в квантовых вычислениях мы сталкиваемся с двумя задачами. Одна задача — записать гамильтониан $\widehat{H}$ для системы так, чтобы эволюция во времени $\exp(-i\widehat{H}t/\hbar)$ представляла собой проведение вычислений. Другая задача — построить аппаратное обеспечение, описываемое этим гамильтонианом.

Задача 1. Рассмотрим гамильтониан модели для ионов, захваченных внутри оптического резонатора:

$$\widehat{H} := \widehat{H}_0 + \widehat{V},$$

где

$$\widehat{H}_0 = \left(\hbar\nu a^\dagger a + \frac{1}{2}I_a\right) \otimes I_b \otimes I_2 + I_a \otimes \hbar\omega_c b^\dagger b \otimes I_2 + I_a \otimes I_b \otimes \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z$$

и

$$\begin{aligned}\widehat{V} &= \hbar\Omega(\exp(i\eta_L(a^\dagger + a) - i(\omega_L t + \phi)I_a) \otimes I_b \otimes \sigma_+ + h.c.)\\ &+ \hbar g \sin(\eta_c(a^\dagger + a)) \otimes (b^\dagger + b) \otimes (\sigma_+ + \sigma_-).\end{aligned}$$

Здесь $a^\dagger$ (a) и $b^\dagger$ (b) — бозе-операторы рождения (уничтожения) для колебательного фонона и фотона поля резонатора соответственно, и ω_0 — частота перехода двухуровневого иона. Постоянные связи ион–фонон и ион–резонатор равны Ω и g, и σ_k $(k = z, +, -)$ — операторы

Паули, описывающие внутреннее состояние иона. То есть рассматривается двухуровневый ион, радиационно связанный с одномодовым полем резонатора с частотой ω_c и внешним полем лазера с частотой ω_L. Операторы I_a, I_b и I_2 — тождественные операторы в соответствующих гильбертовых пространствах. Очевидно, I_2 — единичная матрица 2×2. Таким образом, имеем трехкомпонентную систему. Параметры η_L и η_c — *параметры Лэмба–Дике*, h.c. означает эрмитово сопряжение.

(i) Пусть

$$U_0(t) = \exp(-i\widehat{H}_0 t/\hbar).$$

Вычислить (в представлении взаимодействия)

$$H_I(t) = U_0^\dagger(t)\widehat{V}U_0(t) \equiv \exp(i\widehat{H}_0 t/\hbar)\widehat{V}\exp(-i\widehat{H}_0 t/\hbar).$$

(ii) Выяснить, каким образом можно реализовать вентиль Адамара.

Решение 1. (i) Непосредственное вычисление дает

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_I(t) = {} & \hbar\Omega\left(\widehat{O}_0^L \exp(i(\delta_{0L}t - \phi))\right) \otimes I_b \otimes \sigma_+ \\
& + \hbar\Omega\left(\sum_{k=1}^{\infty}(i\eta_L)^k \widehat{O}_k^L a^k \exp(i((\delta_{0L} - k\nu)t - \phi))\right) \otimes I_b \otimes \sigma_+ \\
& + \hbar\Omega\left(\sum_{k=1}^{\infty}(i\eta_L)^k a^{\dagger k} \widehat{O}_k^L \exp(i((\delta_{0L} + k\nu)t - \phi))\right) \otimes I_b \otimes \sigma_+ \\
& + \hbar g\left(\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty}(i^{k-1}\eta_c^k) a^{\dagger k} \widehat{O}_k^c \exp(i(\delta_{0c} + k\nu + 2\omega_c)t)\right) \otimes b^\dagger \otimes \sigma_+ \\
& + \hbar g\left(\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty}(i^{k-1}\eta_c^k) \widehat{O}_k^c a^k \exp(i(\delta_{0c} - k\nu + 2\omega_c)t)\right) \otimes b^\dagger \otimes \sigma_+ \\
& + \hbar g\left(\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty}(i^{k-1}\eta_c^k) \widehat{O}_k^c a^k \exp(i(\delta_{0c} - k\nu)t)\right) \otimes b \otimes \sigma_+ \\
& + \hbar g\left(\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty}(i^{k-1}\eta_c^k) a^{\dagger k} \widehat{O}_k^c \exp(i(\delta_{0c} + k\nu)t)\right) \otimes b \otimes \sigma_+ \\
& + h.c.,
\end{aligned}$$

где

$$\widehat{O}_k^L := \exp\left(\frac{-\eta_L^2}{2}\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(i\eta_L)^{2p}a^{\dagger p}a^p}{p!(p+k)!}$$

$$\widehat{O}_k^c := \exp\left(\frac{-\eta_c^2}{2}\right)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(i\eta_c)^{2p}a^{\dagger p}a^p}{p!(p+k)!}$$

и

$$\delta_{0L} := \omega_0 - \omega_L, \qquad \delta_{0c} := \omega_0 - \omega_c.$$

(ii) Базис имеет вид

$$|m\rangle \otimes |m\rangle \otimes |g\rangle, \qquad |m\rangle \otimes |n\rangle \otimes |e\rangle,$$

где через $m = 0, 1, \ldots, \infty$ обозначено состояние ионного колебательного движения, и через $n = 0, 1, \ldots, \infty$ — состояние квантованного поля резонатора, и $|g\rangle$ и $|e\rangle$ — основное и возбужденное состояния соответственно для двухуровневого иона. Используя надлежащие значения параметров и времени, получим следующую реализацию вентиля Адамара:

$$|m\rangle \otimes |0\rangle \otimes |g\rangle \to \frac{1}{2}(|m\rangle \otimes |0\rangle \otimes |g\rangle + |m\rangle \otimes |0\rangle \otimes |e\rangle),$$

$$|m\rangle \otimes |0\rangle \otimes |e\rangle \to \frac{1}{2}(|m\rangle \otimes |0\rangle \otimes |g\rangle - |m\rangle \otimes |0\rangle \otimes |e\rangle).$$

Задача 2. Рассмотрим одну непрерывную переменную, соответствующую линейному оператору X. Пусть P — оператор для сопряженной переменной, т. е.

$$[X, P] = iI. \tag{1}$$

Рассмотрим *гамильтониан Керра*

$$K = H^2 = (X^2 + P^2)^2.$$

Гамильтониан Керра соответствует процессу χ^3 в нелинейной оптике. Линейные операторы X и P могли бы соответствовать квадратурным амплитудам моды электромагнитного поля. Квадратурные амплитуды являются вещественными и мнимыми частями комплексного электрического поля.

Пусть

$$S := \frac{1}{2}(XP + PX).$$

Вычислить

$$[K,X], \quad [K,P], \quad [X,[K,S]], \quad [P,[K,S]].$$

Сделать выводы.

Решение 2. Поскольку

$$P^2X^2 = X^2P^2 - 4iXP - 2I, \qquad P^2X = XP^2 - 2iP,$$

получим

$$[K,X] = \frac{i}{2}(X^2P + PX^2 + 2P^3),$$

$$[K,P] = -\frac{i}{2}(P^2X + XP^2 + 2X^3),$$

$$[X,[K,S]] = P^3,$$

$$[P,[K,S]] = X^3.$$

Таким образом, алгебра, порождаемая X, P, H, S, K с помощью вычисления коммутаторов, включает в себя все полиномы третьего порядка по X и P. Можно построить гамильтонианы, являющиеся произвольными эрмитовыми полиномами любого порядка по X и P. Получим

$$[P^3, P^mX^n] = iP^{m+2}X^{n-1} + \text{члены более низкого порядка}$$

и

$$[X^3, P^mX^n] = iP^{m-1}X^{n+2} + \text{члены более низкого порядка.}$$

Задача 3. *Среда Керра* является нелинейной в том смысле, что ее показатель преломления n имеет компоненту, меняющуюся вместе с интенсивностью распространяющегося поля $\mathbf{E}$, то есть

$$n = n_0 + n_2|\mathbf{E}|^2,$$

где n_0 и n_2 — константы. В случае одномодового поля, описываемого бозе-операторами рождения и уничтожения $b^\dagger$ и b, распространяющегося сквозь среду Керра с малыми потерями, гамильтониан взаимодействия может быть записан в виде

$$\widehat{H} = \chi b^{\dagger 2} b^2.$$

(i) Показать, что *состояние с определенным числом частиц* (*фоковское состояние*) $|n\rangle$ является собственным состоянием.

(ii) Предположим, что начальное состояние является когерентным состоянием $|\beta\rangle$. Найти $|\beta(t)\rangle$.

(iii) Пусть $\chi t = \pi r/s$, где r и s — взаимно простые, причем $r < s$. Записать $\exp(-i\pi r n^2/s)$ в виде дискретного преобразования Фурье. Выразить $|\beta(t)\rangle$, используя это разложение.

Решение 3. (i) Поскольку

$$b^{\dagger 2} b^2 \equiv b^\dagger b(b^\dagger b - I)$$

и $b^\dagger b|n\rangle = n|n\rangle$, получим

$$\widehat{H}|n\rangle = \chi(n^2 - n)|n\rangle.$$

Таким образом, собственные числа равны $\chi(n^2 - n)$.

(ii) Решение *нестационарного уравнения Шредингера* ($\hbar = 1$)

$$i\frac{d|\beta\rangle}{dt} = \widehat{H}|\beta\rangle$$

имеет вид

$$|\beta(t)\rangle = \exp(-i\widehat{H}t)|\beta\rangle.$$

Используя результаты (i), находим

$$|\beta(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\chi t(n^2-n)}|n\rangle,$$

где

$$c_n := \exp(-|\beta|^2/2)\frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}.$$

Поскольку число $n^2 - n$ всегда четное, система возрождается всякий раз, когда χt кратно π.

(iii) Пусть $\chi t = \pi r/s$, где r, s — взаимно простые, причем $r < s$. Тогда можно записать квадратичную (по n) фазу через линейные фазы, используя дискретное преобразование Фурье

$$\exp(-i\pi n^2 r/s) = \sum_{p=0}^{\ell-1} a_p^{(r,s)} \exp(-2\pi i p n/\ell),$$

где

$$\ell = \begin{cases} s, & \text{если } r \text{ — нечетное, } s \text{ — четное или наоборот,} \\ 2s, & \text{если и } r \text{ и } s \text{ — нечетные.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$a_p^{(r,s)} = \frac{1}{\ell} \sum_{k=0}^{\ell-1} \exp(-i\pi r k^2/s + 2\pi i p k/\ell)$$

и

$$|\beta(t)\rangle = \sum_{p=0}^{\ell-1} a_p^{(r,s)} |\beta \exp(i\pi(r/s - 2p/\ell))\rangle.$$

Задача 4. Гамильтониан для *генерации второй гармоники* может быть записан в виде

$$\widehat{H} = i\hbar \frac{\kappa}{2} (b^{\dagger 2} b_{sh} - b^2 b_{sh}^{\dagger}),$$

где b — это фундаментальный бозе-оператор моды резонатора, b_{sh} — бозе-оператор моды второй гармоники, и κ — нелинейное взаимодействие. Используя уравнение движения Гейзенберга, найти изменение во времени b и b_{sh}.

Решение 4. *Уравнение движения Гейзенберга* оператора $\widehat{A}$ имеет вид

$$i\hbar \frac{d\widehat{A}}{dt} = [\widehat{A}, \widehat{H}](t).$$

Коммутационные соотношения имеют вид

$$[b, b^{\dagger}] = I, \quad [b_{sh}, b_{sh}^{\dagger}] = I,$$
$$[b, b] = [b_{sh}, b_{sh}] = [b, b_{sh}] = [b, b_{sh}^{\dagger}] = 0.$$

Получаем операторнозначные дифференциальные уравнения

$$\frac{db}{dt} = \kappa b^{\dagger} b_{sh}, \quad \frac{db_{sh}}{dt} = -\frac{\kappa}{2} b^2.$$

В более реалистической модели необходимо учесть потери фотонов в резонаторе.

Задача 5. Одна частица со спином $\frac{1}{2}$ помещается на кончик кантилевера. Кончик может вибрировать только в направлении z. Ферромагнитная частица, чей магнитный момент указывает в положительном направлении z, создает неоднородное магнитное поле при вращении. Однородное магнитное поле $\mathbf{B}_0$, направленное в положительном направлении z, определяет основное состояние спина. Вращающееся магнитное поле, $\mathbf{B}_1(t)$, приводит к переходам между основным и возбужденным состояниями спина. Оно имеет вид

$$B_x(t) = B_1 \cos(\omega t + \phi(t)), \qquad B_y(t) = -B_1 \sin(\omega t + \phi(t)), \qquad B_z(t) = 0,$$

где $\phi(t)$ описывает гладкое изменение фазы, необходимое для циклической адиабатической инверсии спина

$$|(d\phi(t)/dt| \ll \omega).$$

В системе координат, вращающейся с $\mathbf{B}_1(t)$, гамильтониан, зависящий от времени, имеет вид

$$\widehat{H}(t) = \frac{P_z^2}{2m_c^*} + \frac{m_c^* \omega_c^2 Z^2}{2} - \hbar\left(\omega_L - \omega - \frac{d\phi}{dt}\right) S_z - \hbar\omega_1 S_x - g\mu \frac{\partial B_z}{\partial Z} Z S_z,$$

где Z — координата осциллятора, который описывает динамику кончика квазиклассического кантилевера, P_z — момент, m_c^* и ω_c — эффективная масса и частота кантилевера, S_z и S_x — $z-$ и $x-$ компоненты спина,

$$S_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ω_L — гиромагнитная частота, ω_1 — *частота Раби* (частота прецессии спина вокруг магнитного поля $\mathbf{B}_1(t)$ при условии резонанса $\omega = \omega_L$, $d\phi/dt = 0$), g и μ являются соответственно g-фактором (фактором Ланде) и магнитным моментом частицы со спином, и величину $m_c^* = m_c/4$ выберем в качестве эффективной массы кантилевера. Оператор действует в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbf{R}) \otimes \mathbf{C}^2$. Пусть

$$\omega_c = (k_c/m_c^*)^{1/2}, \quad \omega_L = \gamma B_z, \quad \omega_1 = \gamma B_1,$$

где $\gamma = g\mu/\hbar$ — гиромагнитное отношение спина, m_c и k_c — масса и жесткость кантилевера, B_z включает в себя однородное магнитное поле B_0 и магнитное поле, производимое ферромагнитной частицей.

(i) Привести гамильтониан к безразмерной форме $\widehat{H}/\hbar\omega_c \to \widehat{K}$, вводя величины

$$E_0 := \hbar\omega_c, \quad F_0 := \sqrt{k_c E_0}, \quad Z_0 := \sqrt{E_0/k_c}, \quad P_0 := \hbar/Z_0,$$

где $\omega = \omega_L$, и используя безразмерное время

$$\tau := \omega_c t.$$

(ii) Безразмерное уравнение Шредингера, описывающее зависимость от времени

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = \widehat{K}\Psi,$$

где

$$\Psi(\tau, z) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\tau, z) \\ \Psi_2(\tau, z) \end{pmatrix},$$

может быть решено с помощью разложений

$$\Psi_1(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\tau)|n\rangle, \qquad \Psi_2(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\tau)|n\rangle,$$
$$|n\rangle = \pi^{1/4}2^{n/2}(n!)^{1/2}e^{-z^2/2}H_n(z),$$

где $\{|n\rangle : n = 0, 1, \ldots\}$ состояния с определенным числом частиц. Здесь $H_n(z)$ — эрмитовы полиномы. Найти эволюцию во времени комплексных коэффициентов разложения A_n и B_n.

(iii) Найти начальное состояние, ближайшее к классическому пределу.

Решение 5. (i) Поскольку $\widehat{H}/(\hbar\omega_c) \to \widehat{K}$ и учитывая, что $\omega_L = \omega$, получим

$$\widehat{K} = \frac{\widehat{H}}{\hbar\omega_c} = \frac{1}{2}(p_z^2 + z^2) + S_z\frac{d\phi}{d\tau} - \epsilon S_x - 2\eta z S_z,$$

где

$$p_z := \frac{P_z}{P_0}, \quad z := \frac{Z}{Z_0}, \quad \epsilon := \frac{\omega_1}{\omega_c}, \quad \eta = \frac{g\mu}{2F_c}\frac{\partial B_z}{\partial Z}, \quad \omega_c dt = d\tau.$$

(ii) Подставляя разложения в ряд в безразмерное уравнение Шредингера, получим систему линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от времени, относительно комплексных амплитуд $A_n(\tau)$ и $B_n(\tau)$:

$$i\frac{dA_n}{d\tau} = \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{d\phi}{d\tau}\right)A_n - \frac{\eta}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n}A_{n-1} + \sqrt{n+1}A_{n+1}\right) - \frac{\epsilon}{2}B_n,$$

$$i\frac{dB_n}{d\tau} = \left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{d\phi}{d\tau}\right)B_n + \frac{\eta}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n}B_{n-1} + \sqrt{n+1}B_{n+1}\right) - \frac{\epsilon}{2}A_n,$$

где были использованы бозе-операторы b и $b^\dagger$, определяемые по формулам

$$b|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad b^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

и

$$\frac{1}{2}\left(p_z^2 + z^2\right)|n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle,$$

где

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(b^\dagger + b), \quad p_z = \frac{i}{\sqrt{2}}(b^\dagger - b), \quad [b, b^\dagger] = I.$$

(iii) Можно выбрать когерентное состояние

$$\Psi_1(z,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(0)|n\rangle, \quad \Psi_2(z,0) = 0,$$

где

$$A_n(0) = \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}\exp(-|\beta|^2/2).$$

Библиография

Книги

Flügge, Siegfried
Practical Quantum Mechanics
Springer-Verlag, Berlin (1974)

Hardy Y. and Steeb W.-H.
Classical and Quantum Computing with C++ and Java Simulations
Birkhauser-Verlag, Boston (2002)

Kim Y. S. and Noz M. E.
Phase Space Picture of Quantum Mechanics
World Scientific Publishing, Singapore (1991)

Nielsen M. A. and Chuang I. L.
Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press, Cambridge (2000)

Steeb W.-H.
Matrix Calculus and Kronecker Product with Applications and C++ Programs
World Scientific Publishing, Singapore (1997)

Steeb W.-H.
Continuous Symmetries, Lie Algebras, Differential Equations and Computer Algebra
World Scientific Publishing, Singapore (1996)

Steeb W.-H.
Hilbert Spaces, Wavelets, Generalized Functions and Quantum Mechanics
Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1998)

Steeb W.-H.
Quantum Mechanics using Computer Algebra
World Scientific Publishing, Singapore (1994)

Steeb W.-H.
Problems and Solutions in Theoretical and Mathematical Physics, Second Edition, Volume II: Adanced Level
World Scientific Publishing, Singapore (2003)

Статьи

Alber G., Delgado A., Gisin N. and Jex I., *Efficient bipartite quantum state purification in arbitrary dimensional Hilbert spaces*, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 8821 (2001)

Ban M., *The phase operator in quantum information processing*, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, L193 (2002)

Banerji J., *Non-linear wave packet dynamics of coherent states*, PRAMANA J. Phys. **56**, 267 (2001)

Barnett S. M., Jeffers J. and Gatti A., *Quantum optics of lossy beam splitters*, Phys. Rev. A **57**, 2134 (1998)

Bartlett S. D., Sanders B. C., Braunstein S. L. and Nemoto K., *Efficient Classical Simulations of Continuous Variable Quantum Information Process*, Phys. Rev. Lett. **88**, 097904 (2002)

Bennett H. C., D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin and W. K. Wootters, *Mixed State Entanglement and Quantum Error Correction*, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996)

Berman G. P., Borgonovi F., Chapline G., Gurvitz S. A., Hammel P. C., Pelekhov D. V., Suter A. and Tsifrinovich V. I., *Application of Magnetic Resonance Force Microscopy Cyclic Adiabatic Inversion for a Single-Spin Measurement*, J. Phys. A : Math. Gen. **36**, 4417 (2003)

Brassard G., Braunstein S. L. and Cleve R. *Teleportation as a quantum computation*, Physica D **120**, 43 (1998)

Brassard G., Cleve R. and Tapp A., *Cost of Exactly Simulating Quantum Entanglement with Classical Communication*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1874 (1999)

Braunstein S. L. and Kimble H. J., *Teleportation of Continuous Quantum Variables*, Phys. Rev. Lett. **80**, 869 (1998)

Braunstein S. L., Caves C. M., Josza R., Linden N., Popescu S. and Schack R., *Separability of Very Noisy Mixed States and Implications for NMR Quantum Computing*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1054 (1999)

Braunstein S. L., Fuchs C. A., Kimble H. J. and van Loock P., *Quantum versus classical domains for teleportation with continuous variables*, Phys. Rev. A **64**, 022321 (2001)

Braunstein S. L., Mann A. and Revzen M., *Maximal Violation of Bell Inequalities for Mixed States*, Phys. Rev. Lett. **68**, 3259 (1992)

Brukner C., Pan J.-W., Simon C., Weihs G. and Zeilinger A., *Probabilistic Instantaneous Quantum Computation*, Phys. Rev. A **67**, 034304 (2003)

Bruß D., *Characterizing Entanglement*, J. Math. Phys. **43**, 4237 (2002)

Buhrman H., Cleve R. and van Dam W., *Quantum Entanglement and Communication Complexity*, SIAM Journ. on Computing **30**, 1829–1841 (2001)

Childs A. M., Leung D., Verstraete F. and Vidal G., *Asymptotic entanglement capacity of the Ising and anisotropic Heisenberg interactions*, Quantum Information and Computation **3**, 97 (2003)

Chuang I. L. and Yamamoto Y., *A Simple Quantum Computer*, Phys. Rev. A **52**, 3489 (1995)

Cleve R. and Buhrman H., *Substituting Quantum Entanglement for Communication*, Phys. Rev. A **56**, 1201 (1997)

Cleve R., Ekert A., Macchiavello C. and Mosca M., *Quantum Algorithms Revisited*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **454**, 339 (1998)

D'Ariano G. M., De Martin F. and Sacchi M. F., *Continuous Variable Cloning via Network of Parametric Gates*, Phys. Rev. Lett. **86**, 914 (2001)

DasGupta A., *Disentanglement formulas: An alternative derivation and some applications to squeezed coherent states*, Am. J. Phys. **64**, 1422 (1996)

de Oliveira M. C. and Milburn G. J., *Discrete teleportation protocol of continuum spectra field states*, Phys. Rev. A **65**, 032304 (2002)

Einstein A., Podolsky B. and Rosen N., *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. **47**, 777 (1935)

Fan H., Matsumoto K. and Imai H., *Quantify entanglement by concurrence hierarchy*, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 4151 (2003)

Fujii K., *Basic Properties of Coherent and Generalized Coherent Operators Revisited*, Mod. Phys. Lett. A **16**, 1277 (2001)

Gottesman D., *Grand Mathematical Challenge for the Twenty-First Century and the Millennium*, edited by S. J. Lomonaco Jr., (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island), 221 (2002)

Gottesman D., *A Class of Quantum Error-Correcting Codes Saturating the Quantum Hamming Bound*, Phys. Rev. A **54**, 1862 (1996)

Grudka A. and Wojcik A., *How to encode the states of two non-entangled qubits in one qutrit*, Phys. Lett. A **314**, 350 (2003)

Hardy Y., Steeb W.-H. and Stoop R., *Fully Entangled Quantum States in C^{N^2} and Bell Measurement*, Int. J. Theor. Phys. **42**, 2314 (2003)

Jeffers J., Barnett S. M. and Pegg D., *Retrodiction as a tool for micromaser field measurement*, J. Mod. Opt. **49**, 925 (2002)

Jordan T. F., *Quantum mysteries explored*, Am. J. Phys. **62**, 874 (1994)

Kimura G., *The Bloch vector for N-level systems*, Phys. Lett. A **314**, 319 (2003)

Kok P. and Braunstein S. L., *Multi-dimensional Hermite polynomials in quantum optics*, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 6185 (2001)

Koniorczyk M., Buzek V. and Janszky J., *Wigner-function description of quantum teleportation in arbitrary dimensions and a continuous limit*, Phys. Rev. A **64**, 034301 (2001)

Kuzmich A., Walmsley A. and Mandel L., *Violation of a Bell-type inequality in the homodyne measurement of light in an Einstein-Podolsky-Rosen state*, Phys. Rev. A **64**, 063804 (2001)

Laflamme L., Miquel C., Paz J. P. and Zurek W. H., *Perfect Quantum Error Correction Code*, Phys. Rev. Lett. **77**, 198 (1996)

Lee J. and Kim M. S., *Quantum Teleportation Via Mixed Two-Mode Squeezed States in the Coherent-State Representation*, J. Kor. Phys. Soc. **42**, 457 (2003)

Li Shang-Bin and Xu Jing-Bo, *Quantum probabilistic teleportation via entangled coherent states*, Phys. Lett. A **309**, 321 (2003)

Lloyd S. and Braunstein S. L., *Quantum Computing over Continuous Variables*, Phys. Rev. Lett. **82**, 1784 (1999)

Mermin N. D., *From Classical State-Swapping to Quantum Teleportation*, Phys. Rev. A **65**, 012320 (2002)

Milburn G. J. and Braunstein S. L., *Quantum teleportation with squeezed states*, Phys. Rev. A **60**, 937 (1999)

Nielsen M. A. and Chuang L., *Programmable Quantum Gate Arrays*, Phys. Rev. Lett. **79**, 321 (1997)

Paris M. G. A., *Generation of mesoscopic quantum superpositions through Kerr-stimulated degenerate downconversion*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **1**, 662 (1999)

Pegg D. T., Barnett S. M. and Jeffers J., *Quantum theory of preparation and measurement*, J. Mod. Opt. **49**, 913 (2002)

Sharma S. S., *Tripartite GHZ state generation with trapped ion in optical cavity*, Phys. Lett. A **311**, 111 (2003)

Sharma S. S. and Vidiella-Barranco A., *Fast quantum logic gates with trapped ions interacting with external laser and quantized cavity field beyond Lamb-Dicke regime*, Phys. Lett. A **309** 345 (2003)

Steeb W.-H. and Hardy Y., *Entangled Quantum States and a C++ Implementation*, Int. J. Mod. Phys. C **11**, 69 (2000)

Steeb W.-H. and Hardy Y., *Quantum Computing and SymbolicC++ Simulations*, Int. J. Mod. Phys. C **11**, 323 (2000)

Steeb W.-H. and Hardy Y., *Energy Eigenvalue Level Motion and a SymbolicC++ Implementation*, Int. J. Mod. Phys. C **11**, 1347 (2000)

Steeb W.-H. and Hardy Y., *Fermi Systems, Hubbard Model and a SymbolicC++ Implementation*, Int. J. Mod. Phys. C **12**, 235 (2001)

Steeb W.-H. and Hardy Y., *Energy Eigenvalue Level Motion with Two Parameters*, Z. Naturforsch. **56 a**, 565 (2001)

Steeb W.-H. and Hardy Y., *Entangled Quantum States and the Kronecker Product*, Z. Naturforsch. **57 a**, 689 (2002)

Steeb W.-H., Hardy Y., Stoop R., *Discrete wavelets and perturbation theory*, J. Phys A: Math. Gen. **36**, 6807 (2003)

Steeb W.-H., Hardy Y. and Stoop R., *Lax Representation and Kronecker Product*, Physica Scripta **67**, 464 (2003)

Trifonov A., Tsegaye T., Björk G., Söderholm J., Goobar E., Atatüre M. and Sergienko A. V., *Experimental demonstration of the relative phase operator*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., **2**, 105 (2000)

Tyson J., *Operator-Schmidt decomposition of the quantum Fourier transform on* $C^{N_1} \otimes C^{N_2}$, J. Phys. A: Math. Gen. **36** 6813 (2003) van Loock P. and Braunstein S. L., *Multipartite Entanglement for Continuous Variables: A Quantum Teleportation Network*, **84**, 3482 (2000)

van Loock P. and Braunstein S. L., *Greenberger-Horne-Zeilinger nonlocality in phase space*, Phys. Rev. A **63**, 022106 (2001)

Vaziri A., Mair A., Weihs G. and Zeilinger A., *Entanglement of the Angular Orbital Momentum States of the Photons*, Nature **412**, 313 (2001)

Wang X. and Sanders B. C., *Entanglement capability of self-inverse Hamiltonian evolution*, Phys. Rev. A **68**, 014301 (2003)

Werner R. F., *Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model*, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989)

Yura F., *Entanglement cost of three-level antisymmetric states*, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, L237 (2003)

Zou Xu-Bo, Pahlke and Mathis W., *The non-deterministic quantum logic operation and the teleportation of the superposition of the vacuum state and the single-photon state via parametric amplifiers*, Phys. Lett. A **311** 271 (2003)

Список рекомендуемой литературы на русском языке

1. Белокуров В. В., Тимофеевская О. Д., Хрусталев О. А. Квантовая телепортация — обыкновенное чудо. — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.

2. Берман Г. П., Дулен Г. Д., Майньери Р., Цифринович В. И. Введение в квантовые компьютеры. Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004.

3. Боумейстер Д. и др. Физика квантовой информации: Квантовая криптография. Квантовая телепортация. Квантовые вычисления. — М: Постмаркет, 2002.

4. Валиев К. А., Кокин А. А. Квантовые компьютеры: надежды и реальность (2-ое изд). — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2002.

5. Дойч Д. Структура реальности. — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.

6. Кадомцев Б. Б. Динамика и информация. — М.: Ред. УФН, 1997.

7. Квантовые вычисления: за и против. (Сборник статей). — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.

8. Квантовый компьютер и квантовые вычисления (Сборник статей). — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 1999.

9. Квантовые компьютеры, микро- и наноэлектроника. Труды физико-технологического института РАН, т. 18. — М: Наука, 2005.

10. Китаев А., Шень А, Вялый М. Классические и квантовые вычисления. — М: МЦНМО, 1999.

11. Кокин А. А. Твердотельные квантовые компьютеры на ядерных спинах — Москва–Ижевск: ИКИ, 2004.

12. Коэн-Таннуджи К., Диу Б, Лалоэ Ф. Квантовая механика, тт. 1 и 2. — Екатеринбург: УрГу, 2000.

13. Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика. — М: Физматлит, 2000.

14. Менский М. Б. Квантовые измерения и декогеренция. — М.: Физматлит, 2001.

15. Нильсен М. Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация. — М: Мир, 2006.

16. Ожигов. Ю. Квантовые вычисления. Методическое пособие. — М: МГУ факультет ВМиК, 2003.

17. Стин Э. Квантовые вычисления. — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.

18. Холево А. С. Введение в квантовую теорию информации. — М.: МЦНМО, 2002.

19. Холево А. С. Статистическая структура квантовой теории. — Москва–Ижевск: ИКИ, 2003.

20. Цыганков В. Д. Вселенский разум и квантовый нейрокомпьютер. Серия: Информатизация России на пороге XXI века. — М: СИНТЕГ, 2002.

Предметный указатель

Вилли-Ханс Стиб, Йорик Харди

ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЯ В КВАНТОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерный набор и верстка Д. В. Панкратов
Корректор Г. Г. Тетерина

Подписано в печать 15.06.2007. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,21. Уч. изд. л. 17,34.
Гарнитура Антиква. Бумага офсетная №1. Заказ №18.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://shop.rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: (+73412) 500–295