

Т.Э. Кренкель, А.В. Михалев (Москва)

Алгебра и квантовая информатика

Доклад посвящен генезису математических моделей квантовой информатики.

29 июля 2025 года исполняется 100-летие создания матричной квантовой механики Гейзенберга, которая сразу привлекла внимание ведущих математиков и физиков всего мира.

Весной 1927 года Отто Юльевич Шмидт во время своей двухмесячной командировки в Геттингене на дипломатическом приеме встретился с Максом Планком и «имел с ним очень интересный разговор» [1].

25 июня 1930 года на вечернем заседании Первого Всесоюзного съезда математиков В.А. Фок прочитал доклад «Предельные задачи в теории квантов» [2].

В предисловии к 2-му изданию «Абстрактной теории групп», отправленному по радио в августе 1933 года с борта парохода «Челюскин», О.Ю. Шмидт написал: «Сама теория групп, уже ранее применявшееся почти во всех отраслях математики (особенно в алгебре), с тех пор стала незаменимым орудием в топологии и даже в теоретической физике (квантовая механика)» [3].

Первый этап («буря и натиск») создания квантовой механики связан с публикацией в июле-ноябре 1925 года статей В. Гейзенберга («гельголандская») [4], М. Борна, П. Йордана [5] и В. Гейзенберга, М. Борна, П. Йордана [6]. 26 января 1926 года опубликована статья Э. Шредингера [7], обосновавшая волновой вариант квантовой механики.

В 20-е и 30-е годы XX века начался новый этап - написания книг по математическим основам квантовой механики и применению теории групп в квантовой механике: Герман Вейль [8], Ван дер Варден [9], Джон фон Нейман [10], Вигнер [11], Дирак [12], Паули [13].

Следующий этап состоял в написании университетских учебников по квантовой механике и включения её в учебные программы. Для физиков был написан курс Л.Д. Ландау и Е.М Лившица [14]. Преподавание математических основ квантоой механики для студентов- математиков

предполагает знание основ линейной и полилинейной алгебры, теории вероятностей, функционального анализа, теории групп и теории функций комплексного переменного. Одним из первых учебников подобного рода стал курс Л.Д. Фадеева и О.А. Якубовского для матмеха ЛГУ[15].

Идея использования квантовых систем для квантовых вычислений была впервые высказана Ричардом Фейнманом [16] и Юрием Ивановичем Маниным [17].

В конце XX и начале XXI века в связи с разработкой квантовых компьютеров, квантовых алгоритмов и квантовой криптографии возникла потребность в рассмотрении математических моделей квантовой информатики. На этом этапе продолжается анализ физиками роли групп и алгебр Ли и применения их математиками и инженерами в задачах квантовой информатики: А.П. Исаев, В.А. Рубаков [18] Нильсен, Чанг [19], Кайе, Лафлам, Моска [20], А.Я. Хелемский [21], А.С. Холево [22].

В качестве современных текстов для студентов-математиков можно отметить книги Холла[23], Питера Войта «Квантовая теория, группы и представления. Введение» [24], написанную на основе лекционных курсов автора в Колумбийском университете, Хаяши [25], Мермина [26], Харченко[27].

Отметим, что в основе квантовой информатики лежит понятие двухуровневой квантовой системы в спиновом пространстве C^2 . Вектор состояния двухуровневой квантовой системы назван кубитом Бенджаменом Шумахером в 1995 году (и в обозначениях вычислительного базиса Дирака «бра-кет» записывается как

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in C$$

с условием нормировки $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Теорминимум по квантовой информатике для студентов-математиков включает в себя определение трех базовых понятий (синонимов): 1) кубита, 2) спинора ранга один и 3) единичного кватерниона.

Основным геометрическим объектом является сфера Блоха. Квантовым наблюдаемым соответствуют самосопряженные операторы. Временная эволюция кубита описывается унитарным оператором. Оператор Ландау-фон Неймана (матрица плотности) описывает ансамбль чистых кубитов. Процедура измерения состояния квантовой системы осуществляется с помощью проекционных операторов по правилу Борна-фон Неймана.

Литература. [1] В.В. Шмидт. Научная и государственная деятельность О.Ю. Шмидта в 1917-1945 годы. Сборник «Отто Юльевич Шмидт (1891-1956) к 125-летию со дня рождения. Москва, 2016. [2] Труды Первого Всесоюзного Съезда Математиков (Харьков 1930 г.). Москва-Ленинград ОНТИ, 1936. [3] О.Ю. Шмидт. Абстрактная теория групп. Москва, 1933. [4] Werner Heisenberg. Uber quantentheoretische Umdeutung. 29 Juli 1925, Zeitschrift fur Physik. [5] , Max Born, Pascual Jordan. Zur Quantenmechanik. 27 September 1925 , Zeitschrift fur Physik. [6] Werner Heisenberg, Max Born, Pascual Jordan. Zur Quantenmechanik II. November 1925, Zeitschrift fur Physik. [7] Erwin Schrodinger. Quantisierung als Eigenwertproblem. Annalen der Physik, **79**. 1926. [8] Герман Вейль. Теория групп и квантовая механика. Москва «Наука», 1986. [9] Б.Л. Ван дер Варден. Метод теории групп в квантовой механике. Ижевск, 1999. [10] Джон фон Нейман. Математические основы квантовой механики. Москва «Наука». 1964. [11] Е. Вигнер. Теория групп и её приложения к квантовомеханической теории спектров. Новокузнецк, 1961. [12] П. А. М. Дирак. Принципы квантовой механики. Москва Физматгиз, 1960. [13] В. Паули. Общие принципы волновой механики. Москва-Ленинград ОГИЗ, 1947. [14] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Москва ГИФ-МЛ, 1963. [15] Л.Д. Фадеев, О.А.Якубовский. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. Ленинград ЛГУ, 1980. [16] R.P. Feynman. Simulation physics with computers. International J. of Theor. Phys. V. 21, № 6/7, 1982. [17] Ю.И. Манин. Доказуемое и недоказуемое. Москва «Советское Радио», 1979. [18] А.П. Исаев, В.А. Рубаков. Теория групп и симметрий. Конечные группы. Группы и алгебры Ли. Москва УРСС, 2018. [19] М. Нильсен, И. Чанг. Квантовые вычисления и квантовая информация. Москва «Мир», 2006. [20] Ф. Кайе, Р. Лафлам, М. Моска. Введение в квантовые вычисления. Москва-Ижевск, 2009. [21] А.Я. Хелемский. Квантовый функциональный анализ в бескоординатном изложении. Москва МЦНМО, 2009. [22] А.С. Холево. Квантовые системы, каналы, информация. Москва МЦНМО, 2010. [23] В.С. Hall. Quantum theory for mathematicians. Springer, 2013. [24] P. Voit. Quantum theory, Groups and representations. An introduction. Springer, 2017. [25] M Hayashi. A group theoretic approach to quantum information. Springer, 2017. [26] N. D. Mermin. Quantum computer science. An introduction. Cambridge, 2007. [27] V.Kharchenko. Quantum Lie theory. A multilinear approach. Springer, 2015.

Российский новый университет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

e-mail:krenkel2001@mail.ru

e-mail:info.ti.msu@mail.ru