# Внешняя алгебра

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

**Внешняя алгебра** или **алгебра Грассмана** — алгебраическая система, применяемая для описания подпространств векторного пространства. Впервые введена Грассманом в 1844 году.

Внешняя алгебра над пространством $V$ обычно обозначается $\bigwedge V$.

## Содержание



## Определение

Внешняя алгебра $\bigwedge V$ векторного пространства $V$ над полем $K$ — ассоциативная алгебра над $K$, операция в которой обозначается знаком $\wedge$, а порождающими элементами являются $1, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, где $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис пространства $V$. Определяющие соотношения имеют следующий вид:

- $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_i \ (i, j = 1, \ldots, n)$, $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 0$;
- $\mathbf{e}_i \wedge 1 = 1 \wedge \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \ (i = 1, \ldots, n)$, $1 \wedge 1 = 1$.

При этом внешняя алгебра не зависит от выбора базиса.

## Связанные определения

- Операция $\wedge$ называется **внешним произведением**.
- Подпространство $\bigwedge^r V$ (для $r = 0, 1, \ldots, n$) в $\bigwedge V$, порождённое элементами вида $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$, называется $r$-ой **внешней степенью** пространства $V$.

## Свойства

- Алгебра $\bigwedge V$ имеет структуру градуированной алгебры:

$$\bigwedge V = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \bigwedge^r V$$

- Имеют место равенства:

$$\dim \bigwedge^r V = C_n^r, \text{ в частности}$$
$$\bigwedge^r V = 0 \text{ при } r > n, \text{ а также}$$
$$\dim \bigwedge V = 2^n.$$

- Имеет место градуированная коммутативность (суперкоммутативность) внешнего умножения: $u \wedge v = (-1)^{rs} v \wedge u$, если $u \in \bigwedge^r V, v \in \bigwedge^s V$.
- Элементы пространства $\bigwedge^r V$ называются *r*-векторами. В случае, когда характеристика основного поля равна 0, их можно понимать также как кососимметрические *r* раз контравариантные тензоры над $V$, с операцией антисимметризированного (альтернированного) тензорного произведения, то есть внешнее произведение двух антисимметрических тензоров является композицией полной антисимметризации (альтернирования) по всем индексам с тензорным произведением.
  - В частности, внешнее произведение двух векторов можно понимать как следующий тензор:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j - a_j b_i.$$

  - **Замечание:** Нет единого стандарта в том, что значит «антисимметризация». Например, многие авторы предпочитают формулу

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_{ij} = (a_i b_j - a_j b_i)/2.$$

- Внешний квадрат произвольного вектора $\omega \in \bigwedge^1 V$ нулевой:

$$\omega^{\wedge 2} = \omega \wedge \omega = 0.$$

  - Следует отметить, что для *r*-векторов при чётном *r* это неверно. Например

$$(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4)^{\wedge 2} = 2 \cdot \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4.$$

- Линейно независимые системы из $r$ векторов $x_1, \dots, x_r$ и $y_1, \dots, y_r$ из $V$ порождают одно и то же подпространство тогда и только тогда, когда $r$-векторы $x_1 \wedge \dots \wedge x_r$ и $y_1 \wedge \dots \wedge y_r$ пропорциональны.

# Ссылки


- *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. — М.: Факториал Пресс, 2002. — ISBN 5-88688-060-7
- *Шафаревич И. Р., Ремизов А. О.* Линейная алгебра и геометрия, — М.: Физматлит, 2009.
- *Шутц Б.* Геометрические методы математической физики. — М.: Мир, 1984.


# См. также

- Алгебра Клиффорда
- Тензорная алгебра
- Симметрическая алгебра
- Поливектор

---

Источник — https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Внешняя_алгебра&oldid=108561483