Методы геометрической алгебры в квантовой информатике.

I. Алгебра Грассмана $\Lambda(V)$

Герман Гюнтер Грассман (1809-1877), преподаватель математики в гимназии города Штеттина, в 1844 году создал алгебру над полем *К,* основанную на его учении о протяженных величинах.

Внешняя алгебра или **алгебра Грассмана**, алгебраическая система, применяемая для описания подпространств векторного пространства. Внешняя алгебра над пространством V обычно обозначается $\Lambda(V)$.

Исходным пунктом построения алгебры Грассмана является сложение отрезков. Так же как и Гамильтон, Грассман предположил, что можно складывать не только числа, но и отрезки. Новое заключается в операции умножения отрезков. Под произведением отрезков Грассман предложил понимать площадку. Здесь Гамильтон и Грассман расходятся. Другими словами, произведение величин одного порядка у Грассмана есть величина более высокого порядка. Геометрия расматривается Грассманом как приложение общих принципов учения о протяженных величинах к эмпирически данному нам линейному пространству *V.* Учение о протяженных величинах, по существу, является теорией многомерного линейного пространства.

Грассман исходил из единиц $e_1,\dots,e_n$ и линейных комбинаций этих единиц с вещественными коэффициентами. Исходные единицы называются **экстенсивными единицами 1-ой ступени.** Линейные комбинации экстенсивных единиц 1-ой ступени называются **экстенсивными величинами 1-ой ступени,** или **простыми величинами.** Сумма двух экстенсивных величин 1-ой ступени определяется так:

Аналогично определяется и разность величин 1-ой ступени:

Очевидно, что совокупность экстенсивных величин 1-ой ступени есть линейное пространство с базисом $e_1,\dots,e_n$. Затем Грассман определяет <u>несколько видов **умножения**, из которых основным является</u> **комбинаторное** или **внешнее**. Это умножение ассоциативно и дистибутивно и подчиняется правилу

$$e_i e_j = -e_j e_i.$$

Из условия $e_i e_j = -e_j e_i$ следует, что $e_i^2 = 0$. Действительно, $e_i e_j = -e_i e_i$, а такое равенство возможно лишь в случае, когда $e_i e_i = 0$. Грассман называет произведения вида $e_i e_j$ **единицами 2-ой ступени**, для краткости $e_i e_j = e_{ij}$. Таких единиц существует C_n^2. Линейные комбинации единиц 2-ой ступени $A_2 = a_{12} e_{12} + a_{13} e_{13} + \ldots$ Грассман называет **экстенсивными величинами 2-й ступени.**

Определение. Внешняя алгебра ΛV векторного пространства V над полем *K* - ассоциативная алгебра над полем K операция в которой (внешнее произведение) обозначается знаком Λ (wedge product), а порождающими элементами являются $1, e_1, \ldots, e_n$, *где* $e_1, \ldots, e_n$ *базис пространства* V. Определяющие соотношения имеют следующий вид:

При этом внешняя алгебра не зависит от выбора базиса.

В современных терминах единицы 2-ой ступени суть **простые бивекторы,** а экстенсивные величины второй ступени – **бивекторы** – линейные комбинации простых бивекторов.