Лекция 6.Алгебра Клиффорда кубита $Cl_3 = Cl_{3,0} \cong Mat(2, \mathbb{C})$

Статья Клиффорда[1]о «геометрическойалгебре» **W.K. Clifford Applications of Grassmann's extensive algebra, American journal of mathematics, 1(4): 350-358, 1878**

(опубликованная за год до его смерти) основывается на внешней алгебре Грассмана[2] и кватернионах Гамильтона[3].

В настоящее время алгебры Клиффорда активно используются во многих разделах математической физики. Рассмотрим подробнее возникновение и развитие алгебр Клиффорда. В 1843 году Гамильтоном были введены кватернионы, а в 1844 году Грассманопубликовал сочинение «Учение о протяженных величинах» (“Ausdehnungslehre”) и ввел понятие внешней алгебры.

В 1878 году Уильям Клиффорд, с целью описания пространства-времени в трехмерном евклидовом пространстве (**Алгебра пространства-времени (АПВ)**), объединил в своих исследованиях идеи Гамильтона и Грассмана и рассмотрел новые объекты – **Геометрические алгебры**, которые впоследствии стали называться **алгебрами Клиффорда.**

Алгебра Клиффорда является такой же универсальной и фундаментальной как система вещественных чисел. Она расширяет эту систему путем использования геометрической концепции направления (протяженности по Грассману).

---

[1]Уильям Кингдон Клиффорд (1845-1879) рано оценил работы Лобачевского и Римана и первым перевел на английский инаугурационную лекцию Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1854). Его видение окружающего мира *как вариации кривизны пространства* предвосхитило общую теорию относительности Эйнштейна.

[2]Герман Гюнтер Грассман (1809-1877) немецкий геометр и полиматематик первым опубликовавший в 1844 году фундаментальную работу, которая привела к созданию линейной алгебры и содержала определение *внешнего произведения.*

[3]Уильям Роуен Гамильтон (1805-1865) ирландский математик и астроном ввел в 1843 году и пропагандировал *кватернионы.*

Алгебра Клиффорда Cl_3, построенная на основеевклидова пространства E_3, обладает структурой кольца. Действительно, алгебра Клиффорда $Cl_3 \approx Cl^R(3,0)$ (в общем случае Cl_n),будучи векторным пространством, является аддитивной абелевой группой, а закон умножения элементов, вообще говоря, некоммутативен, но дистрибутивен по отношению к сложению. В таких кольцах существуют идеалы. Умножая специально выделенный элемент Cl_3 слева на произвольные элементы кольца, получаем тот идеал, элементы которого называются *спинорами.* Если во всех этих произведениях изменить порядок множителей т.е. умножать на произвольные элементы справа, то получается другой идеал Cl_3. Такой правый идеал называется сопряженным исходному левому идеалу, а его элементы именуются сопряженными спинорами.

В конце XX века был определен основной элемент квантовой информатики – *кубит Ψ.* Возникает естественное желание установить связь этого элемента со структурами геометрической алгебры века XIX.

Волновая функция переводит точки пространства-времени E_3 вдвухкомпонентные*спиноры* ***Паули*** *(двумерные спиноры, спиноры ранга один)*

$$\Psi(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathbb{C},$$

т.е. их значения принадлежат комплексному линейному пространству $\mathbb{C}^2$.

Волновая функция, введенная Шредингером в качестве базового объекта квантовой механики в 1926 году, не описывает явления связанные с магнитным полем. Это обстоятельство привело к введению двухкомпонентных спиноров Паули в 1927 году и соответственно, в дальнейшем, к алгебре Клиффорда Cl_3.

Уравнение Шредингера в формализмедвухкомпонентных спиноров Паули называется уравнением Шредингера-Паули (*уравнением Паули*). Рассмотрим как появляется это уравнение в контексте алгебры Клиффорда Cl_3.

В электромагнитном поле $\vec{E}, \vec{B}$ с потенциалами $V, \vec{A}$ уравнение Шредингера принимает вид

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left[\left(-ih\nabla - e\vec{A}\right)^2\right]\Psi - eV\Psi,$$

и после «квадрирования» записывается как

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left[-h^2\nabla^2 - e^2\vec{A}^2 + ihe\left(\overline{\nabla\vec{A}} + \vec{A}\nabla\right)\right]\Psi - eV\Psi.$$

Но это уравнение всё ещё не учитывает спин электрона.

Марсель Рис первым рассмотрел в 1947 году спиноры как элеменenты минимального левого идеала алгебры Клиффорда.

Матричные представления комплексных алгебр Клиффорда задаются с помощью эрмитова идемпотента и левого идеала.

Пусть кубит Ψ– элементалгебрыКлиффорда Cl_3 евклидова пространства E_3, а σ_z –выбранный в этой алгебре вектор единичной длины. Говорят, что Ψ является положительным спинором, если $\Psi\sigma_z = \Psi$, и отрицательным, если $\Psi\sigma_z = -\Psi$.

Спиноры Паули могут быть представлены в виде квадратных матриц с единственным ненулевым вектором-столбцом

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 & 0 \\ \Psi_2 & 0 \end{pmatrix}, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathbb{C}.$$

Левый идеал матричной алгебры $Mat(2, \mathbb{C})$ может быть записан в виде

$S = Mat(2, \mathbb{C})f$, где $f = \frac{1}{2}(I + \sigma_z)$ идемпотент $f^2 = f$. Идемпотент примитивен и левый идеал минимален.

Произвольно заданному кубиту Ψ из Cl_3 всегда можно сопоставить левый идеал положительных спиноров, выбрав в качестве фиксированного элемента, по которому строится левый идеал,

$$\Psi_{+} = \frac{1}{2}\Psi(1 + \sigma_z).$$

Ведь тогда

$$\Psi_{+}\sigma_z = \frac{1}{2}\Psi(1 + \sigma_z)\sigma_z = \Psi_{+},$$

и равенство сохранится при умножении обеих частей слева на любые $\Psi \in Cl_3$.

Можно также построить левый идеал отрицательных спиноров, умножая слева элементы Cl_3 на

$$\Psi_{-} = \frac{1}{2}\Psi(1 - \sigma_z)$$

потому что

$$\Psi_{-}\sigma_z = \frac{1}{2}\Psi(1 - \sigma_z)\sigma_z = -\Psi_{-}.$$

Ясно, что Ψесть сумма положительного и отрицательного спиноров, так как

$$\Psi = \frac{1}{2}\Psi(1 + \sigma_z) + \frac{1}{2}\Psi(1 - \sigma_z) = \Psi_{+} + \Psi_{-}.$$

Идеалы отрицательных и положительных спиноров независимы. Для доказательства достаточно проверить, что из

$$\lambda\Psi_{+} + \mu\Psi_{-} = 0$$

следует, что λ=0 и μ=0. Действительно, умножим предыдущее равенство на σ_z. Получается соотношение

$$\lambda\Psi_{+} - \mu\Psi_{-} = 0,$$

и простая комбинация двух равенств дает

$$\lambda\Psi_{+} = 0, \quad \mu\Psi_{-} = 0,$$

т.е. λ=0 и μ=0 , поскольку и $\Psi_+ \neq 0$ и $\Psi_- \neq 0$.

Определим базисы линейных подпространств спиноров Ψ_+ и Ψ_- . Для этого элементы $\Psi \in Cl_3$ разложим следующим образом:

$\Psi = a_0 + a_k\sigma_k$

(индекс суммирования пробегает значения 1, 2, 3), где a_0 и a_k являются суммами скаляров и псевдоскаляров.

Тогда

$\Psi_+ = \frac{1}{2}(a_0 + a_k\sigma_k)(1+\sigma_z)=$

$= \frac{1}{2}(a_0 + a_3)(1 + \sigma_z) + \frac{1}{2}(a_0 + ia_2)(1 - \sigma_z)\sigma_x,$

т.е. числа Паули $1 + \sigma_z$ и $(1 - \sigma_z)\sigma_x$ образуют базис для Ψ_+. Аналогично получаем, что базис для Ψ_- образуют $1 - \sigma_z$ и $(1 + \sigma_z)\sigma_x$.

Теорема. *Для всякого конечномерного евклидова пространства алгебра Клиффорда Cl_n существует и имеет размерность 2^n над полем, где празмерность пространства.*

Алгебра Клиффорда Cl_3 обобщенных кватернионов (по Эмилю Артину) размерности 8 над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ проста, т.е. она не имеет собственных двусторонних идеалов.

Матрицы Паули определяют двумерное представление евклидовой сигнатуры. Установим связь алгебры Клиффорда Cl_3 с алгеброй матриц Паули.

Спиновые матрицы Паули изоморфны Cl_3 и задают её матричное представление. Это представление может быть записано следующим образом:

Cl_3 *Mat(2,ℂ)*

1 *I*

$e_1 \sigma_x$

$e_2 \sigma_y$

$\boldsymbol{e_3 \sigma_z}$

Алгебра Клиффорда кубита восьмимерна и её образующими служат следующие геометрические величины:

Скаляр 1

Векторы e_1, e_2, e_3

Бивекторы $e_{12} = e_1 \wedge e_2, e_{13} = e_1 \wedge e_3, e_{23} = e_2 \wedge e_3$

Тривектор $e_{123} = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = i$(элемент единичного объема, ассоциированный с мнимой единицей)

***Артин Э*. Геометрическая алгебра - М.:Мир, 1969.**

Стр. 265 Пример II. *Обобщенная алгебра кватернионов.*

***Казанова Г.* Векторная алгебра – М.: Мир, 1979.**

Стр. 63 *Спиноры Паули.*

***Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия -М.: Наука, 1986.**

Стр. 189 Параграф 15. **АлгебрыКлиффорда**

***PerttiLounesto*Clifford algebras and spinors – Cambridge Press, 2001.**

В СССР инициаторами преподавания геометрической алгебры были Юрий Борисович Румер 1936 (физик) и Петр КонстантиновичРашевский 1955 (математик).

В 1986 году на международной конференции «Алгебры Клиффорда и их применения в матфизике» было заявлено, что алгебра Клиффорда является такой же универсальной и фундаментальной, как система вещественных чисел.

Адептами такой точки зрения, кроме математиков, являются такие популяризаторы алгебр Клиффорда в США как Дэвид Хестенес и Гаррет Собчек. В РФ этим занимается Тарханов.

Ниже приводится перевод Главы 14 книги Пертти Лоунесто **Определения алгебры Клиффорда.**

Рекомендация. Предварительно прочитайте в книге Лоунесто «История алгебр Клиффорда».

В 1964 году Атья, Ботт иШапиро рассмотрели спиновые пространства как модули над алгеброй Клиффорда вместо рассмотрения их в виде минимальных левых идеалов алгебры Клиффорда. Это позволило дифференцировать спинорнозначные функции на многообразиях, а не только на плоских пространствах.

Они снова определили вещественно определенные алгебры Клиффорда Cl_n и $Cl_{0,n}$ как матричные алгебры с элементами вR, C, H, R+R, H+H (определенными Картаном в 1908 году). Они переоткрыли периодичность 8 (также открытую Картаном в 1908 году) по отношению к градуированному тензорному произведению (открытому Шевалле в 1955 году).Они подчеркнули важность Z_2 - градуированной структуры (четности в статьях Клиффорда) и использовали её для упрощения подхода Шевалле к группам Липшитца (Шевалле).

(Пертти Лоунесто) **Глава 14. Определения алгебры Клиффорда**

В этой главе мы впервые рассмотрим формальное определение алгебры Клиффорда. Существует несколько определений, пригодных для различных целей. В математике определения служат непременным условием для последующей дедукции, в физике определения вторичны и в основном предназначаются для описания физических явлений. Мы приведем оригинальное определение Клиффорда в его бескоординатном виде как деформацию внешней алгебры, определение в виде универсального свойства, которое не гарантирует существование и определение в виде идеала тензорной алгебры.

14.1 Оригинальное определение Клиффорда

Внешняя алгебра Грассмана $\wedge R^n$ линейного пространства R^n является ассоциативной алгеброй размерности 2^n. В выражениях базиса $\{\boldsymbol{e_1},\ldots,\boldsymbol{e_n}\}$ пространства R^n внешняя алгебра $\wedge R^n$ имеет базис

1

$\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$

$\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_3}, \ldots, \quad \boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_n}, \quad \boldsymbol{e_2} \wedge \boldsymbol{e_3}, \ldots, \boldsymbol{e_{n-1}} \wedge \boldsymbol{e_n}$

.

.

.

$\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{e_n}.$

Внешняя алгебра имеет единицу 1 и удовлетворяет правилам умножения

$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ приi≠j,

$e_i \wedge e_i = 0.$

Клиффордв 1882 году **(W.K. Clifford On the classification of geometric algebras 1882)**[4]

оставил без изменения первое правило, но заменил второе и правила стали выглядеть как

$e_i e_j = -e_j e_i$ приi≠j,

[4]Посмертная публикация.

$e_i e_i = 1.$

При этом $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ представляют собой ортонормированный базис положительно определенного евклидова пространства R^n.

Ассоциативная алгебра размерности 2^n, определенная таким образом, представляет собой алгебру Клиффорда Cl_n.

Раньше, в 1878 году, Клиффорд рассматривал правила умножения

$e_i e_j = -e_j e_i$ при $i \neq j$,

$e_i e_i = -1$

алгебры Клиффорда $Cl_{0,n}$ для отрицательно определенного пространства $R^{0,n}$.

14.2 Безбазисная формулировка определения Клифорда

Здесь мы рассмотрим в качестве примера внешнюю алгебру $\wedge R^4$ 4-мерного вещественного пространства R^4. Снабдим линейное пространство R^4 *квадратичной формой*

$Q(\boldsymbol{x}) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

и свяжем с *Qсимметричную* билинейную форму

$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\frac{1}{2}[Q(\mathbf{x}+\mathbf{y})-Q(\mathbf{x})-Q(\mathbf{y})].$

Таким образом R^4 становится изометричным пространству-времени Минковского $R^{1,3}$. Затем определим **левую контракцию** $u\rfloor v\in R^{1,3}$ как

(a) $\mathbf{x}\rfloor\mathbf{y}=\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$

(b) $\mathbf{x}\rfloor(u\wedge v)=(\mathbf{x}\rfloor u)\wedge v+\hat{u}(\boldsymbol{x}\rfloor v)$

(c) $(u\wedge v)\rfloor w=u\rfloor(v\rfloor w)$

для $\mathbf{x},\mathbf{y}\in R^{1,3}$ и $u,v,w\in\wedge R^{1,3}$.[i] Тождество (b) означает, что **x** действует как производная, а тождество (c) переводит $\wedge R^{1,3}$ в левый модуль над $\wedge R^{1,3}$. Затем введем *произведение Клиффорда* $\mathbf{x}\in R^{1,3}$ и $u\in\wedge R^{1,3}$ по формуле

$\mathbf{x}u=\mathbf{x}\rfloor u+\mathbf{x}\wedge u$

и продолжим его по линейности и ассоциативности на всю внешнюю алгебру $\wedge R^{1,3}$. С определенным таким образом произведением Клиффорда (и подлежащим линейным пространством) внешняя алгебра $\wedge R^{1,3}$ становится **алгеброй Клиффорда** $Cl_{1,3}$.

14.3 Определение с помощью образующих и определяющих соотношений

Данное определение часто используется физиками. Оно применимо к невырожденным квадратичным формам, в частности к вещественным квадратичным пространствам $R^{p,q}$.

---

i

Определение. Ассоциативная алгебра над F с единицей 1 является алгеброй Клиффорда $Cl(Q)$ невырожденной квадратичной формы Q над V ,если о: $F \cdot 1$ как заданные подпространства такие, что

(1) $\boldsymbol{x}^2 = Q(\boldsymbol{x})$ для любых $\boldsymbol{x} \in V$

(2) V образует $Cl(Q)$ как алгебру над F

(3) $Cl(Q)$ не образуется любым собственным подпространством V. ■

Третье условие (3) гарантирует универсальность и размерность 2^n . Используя ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ для $R^{p,q}$, генерирующий $Cl_{p,q}$, условие (1) может быть записано в виде

$(1.a)\mathbf{e}_i^2 = 1, 1 \leq i \leq p, \quad \mathbf{e}_i^2 = -1, p < i \leq n, \quad \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = - \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i\,, \; i < j,$

а условие (3) принимает вид $\boldsymbol{e_1 e_2 \dots e_n} \neq \pm 1$ (см. Портеус 1969).

Определяющее соотношение (3) при сигнатурах p-q=1 mod4, где $(\boldsymbol{e_1 e_2} \dots \boldsymbol{e_n})^2 = 1$. Условия (1,а) без (3) также образуют малоразмерную неуниверсальную алгебру размерности 2^{n-1} при любой сигнатуре p-q=1mod4 в которой все базисные элементы $\mathbf{e}_i$ коммутируют с $\mathbf{e}_{12\dots n} = \boldsymbol{e_1 e_2 \dots e_n}$. Никаких подобных неуниверсальных алгебр не существует в четных размерностях, поэтому становится возможным введение алгебры Клиффорда для пространства-времени Минковскогобез условия (3).

Приведенное выше определение задает единственную алгебру только для невырожденных квадратичных форм Q . В частности, это определение не подходит для вырожденной формыQ для которой $e_1 e_2 \ldots e_n = 0$, что подтверждается двумя контпримерами приведенными ниже для случая Q=0.

1. Определим для **x,y** $\in V, dimV = n$ произведение**xy**=0. Таким образом получаем прямую сумму $F+V$ как ассоциативную алгебру алгебру с 1. Её размерность равна $n+1$.
2. Введем произведение в $\wedge R^3$ в виде $e_i e_j = e_i \wedge e_j$ для всех $i,j=1,2,3$ и $e_1 e_2 e_3=0$. Таким образом подпространство $R + R^3 + \wedge^2 R^3$ внешней алгебры $\wedge R^3$ представляет собой 7-мерную ассоциативную алгебру с единицей, образованную R и R^3.

Это показывает, что нельзя заменить условие (3) требованием что коммутируют только параллельные векторы. Мы можем включить произвольные квадратичные формы Q, требуя вместо условия (3) ʌчтобы произведение любого набора линейо свободных векторов в Vне должны принадлежать F. Но и этого недостаточно, чтобы избежать некоторой неопределенности в определении образующих и определяющих соотношений. Приведенное выше определение дает единственную алгебру с точностью до изоморфизма.

Приведем ещё два примера, разъясняющих значение этого утверждения:

3. Таблица умножения внешней алгебры$\wedge R^2$по отношению к базису $\{e_1, e_2, e_1 \wedge e_2\}$

имеет вид

$\wedge$	e_1	e_2	$e_1 \wedge e_2$
e_1	0	$e_1 \wedge e_2$	0
e_2	$-e_1 \wedge e_2$	0	0
$e_1 \wedge e_2$	0	0	0

Введем второе произведение на$\wedge R^2$ с таблицей умножения

$\dot{\wedge}$	e_1	e_2	$e_1 \dot{\wedge} e_2$

$\boldsymbol{e_1}$	0	$\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2}+b$	$-b\boldsymbol{e_1}$
$\boldsymbol{e_2}$	$-\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2}-b$	0	$-b\boldsymbol{e_2}$
$\boldsymbol{e_1} \dot{\wedge} \boldsymbol{e_2}$	$-b\boldsymbol{e_1}$	$-b\boldsymbol{e_2}$	$-b^2-2b\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2}$

$\wedge$умножения второго произведения к виду

$\dot{\wedge}$	$\boldsymbol{e_1}$	$\boldsymbol{e_2}$	$\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2} + b$
$\boldsymbol{e_1}$	0	$\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2}+b$	0
$\boldsymbol{e_2}$	$-\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2} - b$	0	0
$\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2} + b$	0	0	0

которая показывает что сгенерирована новая внешняя алгебра $\wedge R^2$ на R^2, отличающаяся от $\wedge R^2$, но изоморфная $\wedge R^2$. Другими словами, мы ввели линейное отображение α: $\wedge R^2 \rightarrow \dot{\wedge} R^2$ для которого α($\boldsymbol{e_i}$)=$\boldsymbol{e_i}$, $i = 1{,}2$ и α($\boldsymbol{e_1} \wedge \boldsymbol{e_2}$)=$\boldsymbol{e_1} \dot{\wedge} \boldsymbol{e_2} = e_1 \wedge e_2 + b$ так что это тождество на R^2 сохраняет четно-нечетную градуировку и устанавливает изоморфизм между двумя произведениями α($u\wedge v$)=α(u)$\dot{\wedge}$α(v).

4. Ортонормированный базис e_1, e_2 для R^2 удовлетворяющий $e_i e_j + e_j e_i = \delta_{ij}$ генерирует алгебру Клиффорда $Cl_2 = Cl_{2,0}$ с базисом $\{1, e_1, e_2, e_1 e_2\}$, где $e_{12} = e_1 e_2 (= e_1 \wedge e_2)$. Таблица умножения Cl_2 имеет вид

	e_1	e_2	$e_1 e_2$
e_1	1	e_{12}	e_2
e_2	$-e_{12}$	1	$-e_1$
$e_1 e_2$	$-e_2$	e_1	-1

Введем второе произведение на Cl_2 с таблицей умножения

	e_1	e_2	e_{12}

e_1	1	$e_{12}+b$	e_2
e_2	$-e_{12}-b$	1	$-e_1-be_2$
e_{12}	$-e_2-be_1$	e_1-be_2	-1-b^2-2be_{12}

Антикоммутационные соотношения $e_ie_j+e_je_i=\delta_{ij}$ также удовлетворяют новому призведению и ассоциативность проверяется непосредственно. При изменении вещественного числа b получаем семейство различных, но изоморфных алгебр Клиффорда на R^2.

14.4 Универсальный объектквадратичных алгебр

Алгебра Клиффорда Cl(Q) является универсальной ассоциативной алгеброй *над F образованной V с соотношениями* $\boldsymbol{x}^2=Q(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in V$*. Пусть Q* квадратичная форма на линейном пространстве V над полемF и A ассоциативная алгебра над F с единицей 1_A . Линейное отображение

$V \to A$, $\boldsymbol{x}\to\varphi_x$, такое что

$(\varphi_x)^2=Q(\boldsymbol{x})\cdot 1_A$для всех $\boldsymbol{x}\in V$

называется *отображением Клиффорда*. Подалгебра A образованная $F=F\cdot 1_A$ и V (или более точно образами F и V в A) называется *квадратичной алгеброй.*[ii]

Эта **алгебра Клиффорда**Cl(Q)является квадратичной алгеброй с отображением Клиффорда $V\to Cl(Q)$, $\mathbf{x}\to\gamma_x$ таким, чтодля любого отображения Клиффорда$\varphi: V\to A$ существует единственный гомоморфизм алгебры ψ:Cl(Q)→A , который преобразует диаграмму

$V \to Cl(Q)$

ii

в коммутативную.

Это определение показывает, что все отображения Клиффорда могут быть получены изγ:$V \to Cl$(Q), которое является **универсальным**.

Определение универсального свойства должно быть понятно алгебраисту, который представляет, что такое категории и морфизмы, применительно к теории универсальных объектов. Категория содержит объекты и морфизмы между объектами. Обратимые морфизмы называются изоморфизмами.

В категории существует начальный (соответственно, финальный) универсальный объект U, если для любого объекта A существует единственный морфизм α:$U \to A$(соответственно$A \to U$). Универсальные объекты единственны с точностью до изоморфизма. Во многих категориях существует тривиальный финальный объект, который часто сводится к 0. Алгебра Клиффорда является начальным универсальным объектом в категории квадратичных алгебр.

Пример. Рассмотрим категорию квадратичных алгебр на $R^{p,q}$. В этой категории начальным универсальным объектом является алгебра Клиффорда $Cl_{p,q}$размерности 2^n, а финальным универсальным объектом служит 0. Между этими двумя объектами нет других объектов при$p-q \neq 1mod4$. Однако в этой категории существуют четыре объекта при $p-q = 1mod4$; между $Cl_{p,q}$ и 0 существуют две алгебры размерности 2^{n-1}; в одной выполняется соотношение $\boldsymbol{e_1 e_2 \ldots e_n}$=1, а во второй соотношение $\boldsymbol{e_1 e_2 \ldots e_n}$ = -1; эти две алгебры не изоморфны в категории квадратичных алгебр (тождественное отображение на $R^{p,q}$ не продолжается до изоморфизма с одной агебры на вторую);однако, они изоморфны как ассоциативные алгебры (в категории всех вещественных алгебр).

Приведенное определение алгебры Клиффорда больше подходит для алгебраиста, который желает исследовать алгебры Клиффорда над коммутативными кольцами (и который не настаивает на инъективности отображений F$\to A$ и $V \to A$). Однако, такой подход не гарантирует существование, которое имеет место при конструировании алгебры Клифорда как фактор-алгебры тензорной алгебры (которая, в свою очередь, рассматривается алгебраистами каквсеобщая алгебра).

14.5 Алгебра Клиффорда как фактор тензорной алгебры

Шевалле в 1954 году сконструировал алгебру Клиффорда*Cl*(Q) как фактор-алгебру $\otimes V/I(Q)$ тензорной алгебры$\otimes V$ по отношению к двустороннему идеалу $I(Q)$ образованному элементами $\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x}-Q(x)$, где $\boldsymbol{x}\in V$. Использование тензорной алгебры дает конструктивное доказательство существования, что вполне устраивает алгебраиста, заинтересованного в быстром доступе к основным свойствам алгебр Клиффорда над коммутативными кольцами.

В характеристикеноль можно избежать фактор структур, если конкретизировать рассмотрение внешней алгебры $\wedge V$ в виде подпространства антисимметрических тензоров в $\otimes V$. Например, если $\boldsymbol{x,y} \in \boldsymbol{V}$, то$\boldsymbol{x\wedge y} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{x}) \in\wedge^2 \boldsymbol{V}$. В более общем виде простой k - векторзаписывается в виде$\boldsymbol{x}_1 \wedge x_2 \dots\ x_k$

$$Alt(x_1 \otimes x_2 \dots \otimes x_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\pi} sign(\pi)\, x_{\pi(1)} \otimes x_{\pi(2)} \otimes \dots \otimes x_{\pi(k)}$$

, где линейный оператор *Alt:*$\otimes \boldsymbol{V} \to\wedge V$называется **альтернацией** и является проекционным оператором Alt(⊗V)=∧V, удовлетворяющим $u\wedge v=Alt(u\otimes v)$.

Таким же образом можно получить изоморфизм линейных пространств, идентифицируя простые k-векторы с антисимметризованными произведениями Клиффорда

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_k \to x_1 \dot{\wedge} x_2 \dot{\wedge} \ldots \dot{\wedge} x_k = \frac{1}{k!}\sum_{\pi} sign(\pi) x_{\pi(1)} \otimes x_{\pi(2)} \otimes \ldots \otimes x_{\pi(k)}$$

и расщепляя алгебру Клиффорда *Cl*(Q) на фиксированные подпространства k-векторов$\wedge^k \boldsymbol{V} \subset$*Cl*(Q).

Любой ортогональный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V задает соответствие

$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \to e_{i_1} \dot{\wedge} e_{i_2} \dot{\wedge} \ldots \dot{\wedge} e_{i_k} = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}$

для базисов $\wedge^{\boldsymbol{V}}$ и *Cl*(Q).

Литература

Ю.Б. Румер Спинорный анализ – М.: ОНТИ, 1936.

Эли Картан Теория спиноров 1938

П.К. Рашевский Теория спиноров УМН т. 10, (2), 1955.

Г. Бринкман Применение спинорных инвариантов в атомной физике - М.: Издательство иностранной литературы, 1959.

С. Ленг Алгебра – М.: Мир, 1968.

Б.Л. ван дер Варден – М.: Наука, 1976.

***Артин Э*. Геометрическая алгебра - М.: Мир, 1969.**

Стр. 265 Пример II. *Обобщенная алгебра кватернионов.*

З.А. Кузичева Векторы, алгебры, пространства – М.: Знание, 1970.

И.Л. Кантор, А.С. Солодовников Гиперкомплексные числа - М.: Наука, 1973.

***Казанова Г.* Векторная алгебра – М.: Мир, 1979.**

Стр. 63 *Спиноры Паули.*

***Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия -М.: Наука, 1986.**

Стр. 189 Параграф 15. **АлгебрыКлиффорда** Стр. 276 **Алгебра Грассмана**

П. Дирак Спиноры в гильбертовом пространстве – Новокузнецкий физико-математический институт, 1998.

Р. Брауэр, Г. Вейль Спиноры в n - мерном пространстве(Стр. 90-124 в книге Дирака)

Джон Х. Конвей, Дерек А. Смит О кватернионах и октавах – М.: МЦНМО, 2009.

*PerttiLounesto***Clifford algebras and spinors – Cambridge Press, 2001.**

Н. Бурбаки Алгебра Глава 9 Полулинейные и квадратичные формы

C.Chevalley Theory of Lie groups

C. ChevalleyThe algebraic theory of spinors NY Columbia University Press 1954

W.K. Clifford Applications of Grassmann's extensive algebra, American journal of mathematics, 1(4): 350-358,1878

W.K. Clifford On the classification of geometric algebras 1882

J. HelmstetterAlgebres de Clifford et algebres de Weyl

I.R. Porteous Clifford algebras and the classical groups Cambridge Press 1995