Пять лекций по алгебраическим основам квантовой информатики

(Спецкурс «Алгебраические основы квантовой информатики»)

"New scientific ideas never spring from a communal body, however organized, but rather from the head of an individually inspired researcher who struggles with his problems in lonely thought and unites all his thought on one single point which is his whole world for the moment."

Max Planck.

«***Единичные кватернионы образуют группу SU_2, являющуюся двулистным накрытием группы поворотов SO_3. Благодаря этому кватернионы очень удобны при работе с поворотами и моментом количества движения, особенно в контексте квантовой механики; в наши дни мы рассматриваем это обстоятельство как частный случай алгебр Клиффорда. ...но единичные кватернионы хорошо укладываются в наше понимание вещей.»***

Джон Баэз.

«Как часто бывает, абстрактный язык и непонятные выражения указывают на отсутствие полной ясности.»

Уильям Берке.

Предисловие.

В античные времена у Платона в диалоге «Менон» появилась категория «ноумен» - система понятий, связанная с чувственным восприятием и пониманием явлений (вещей) окружающего мира. Естественно, с развитием естествознания в процессе познания, эта категория пополнялась философами, и в 1781 году Иммануил Кант в «Критике чистого разума» ввел в философский обиход «вещь в себе» (Ding an sich selbst betrachtet – Вещь как таковая).

Ноуменами являются треугольники, производная, мнимая единица, версор (единичный кватернион), время, материя.

В XXI веке появился новый ноумен - **кубит.** Исторически оказалось что впервые кубит появился в 1843 году под видом версора (кватерниона с единичной нормой).

Настоящие лекции посвящены рассмотрению этого нового квантового ноумена по Канту.

Введение.

Предлагаемый курс лекций посвящен новому разделу прикладной геометрической алгебры и алгебраической топологии – квантовой информатике.

Идея использования квантовой теории в качестве вычислительного инструмента была впервые высказана в 80-е годы прошлого столетия советским математиком Юрием Маниным и американским физиком Ричардом Фейнманом. Эта идея сразу привлекла к себе внимание мирового научного сообщества: физиков, математиков, инженеров и программистов. Сразу началось освоение её по множеству направлений: разработка и создание квантовых компьютеров, квантовых алгоритмов, квантовых кодов, квантовой криптографии, квантовой телепортации и т.д.

Не остались в стороне и философы, в первую очередь, представители научной школы эволюционной эпистемологии Карла Поппера. Философский дискурс по квантовой информатике на современном этапе посвящен проекту создания информационной интерпретации квантовой механики.

Первое направление дискурса *"it from bit"* (**Всё из бита)** имеет онтологическое значение и было сформулировано американским физиком Джоном Уилером в 1990 году. В основу этого направления положено представление Мира как бесконечного текста (см. глубоко философский рассказ аргентинского писателя Борхеса «Вавилонская библиотека»).

Второе направление *"it from qubit"* (**Всё из кубита**) имеет эпистомологическое значение и зиждется на основном понятии квантовой информатики – **кубите**, определенном Беном Шумахером в 1995 году. По убеждению многих физиков, информационная интерпретация квантовой механики[1] уже существовала в истории физики в виде **копенгагенской вероятностной интерпретации квантовой механики**, развитой научной школой Нильса Бора.

Лекции построены на основании обратной эпистомологической последовательности квантовой информатики, т.е. на принципе обратной хронологии:

1) Кубит (1995) → 2) Сфера Феликса Блоха (1946) → 3) 1-ое расслоение Хайнца Хопфа (1931) → 4) Спинор Вольфганга Паули (1927) → 5) Спинор Эли Картана (1913) → 6) Сфера Анри Пуанкаре (1892) → 7) Сфера Бернхарда Римана (1854) → 8) Параметры Джорджа Стокса поляризации света (1852) → 9) Единичный кватернион (версор) Уильяма Гамильтона (1843).

   Первая монография «Математические основы квантовой механики» была написана Джоном фон Нейманом в 1932 году. В Главе 4 «Дедуктивное построение теории» при построении теории скрытых переменных он допустил ошибку, которая была исправлена Гретой Герман в 1935 году, но исправление оставалось незамечеченным вплоть до появления двух статей Джона Стюарта Белла в 1964 и 1966 годах.

Лекция 1. Базовый объект квантовой информатики кубит Ψ – вектор состояния двухуровневой квантовой системы.

Определение кубита невероятно и обманчиво просто.

Определение 1.

Кубит это два комплексных числа сумма квадратов модулей которых равна 1.

[1] Термин «квантовая механика» был введен в 1925 году Максом Борном после написания гельголандской статьи Вернером Гейзенбергом (июль 1925 года).

Кубит является вектором унитарного пространства $H = C^2$.

Определение 1. *Унитарным пространством называется комплексное линейное пространство L с эрмитовым положительно определенным скалярным произведением.*

Физическими реализациями **кубита** являются спин (внутренний угловой момент) электрона или атома со спином 1/2, поляризация монохроматического фотона, любая квантовая система (с двумя активными энергетическими уровнями).

Введем *обозначения Дирака*[2] бра $\langle$ и кет $\rangle$ от английского слова bracket (скобки) $\langle,\rangle$.

Каждому вектору-столбцу $|\Psi\rangle$ поставим в соответствие вектор-строку $\langle\Psi|$ по

$$|\Psi\rangle = (\alpha\ \beta\ ) \rightarrow \langle\Psi| = (\alpha^*\ \beta^*\ ) = (|\Psi\rangle)^{\dagger}.$$

В этом равенстве используется эрмитово сопряжение вектора-столбца † – транспонирование и комплексное сопряжение.

Определение 2. Унитарное пространство – комплексное линейное пространство векторов $|\Psi\rangle$, в котором каждой упорядоченной паре векторов $|\varphi\rangle$ и $|\Psi\rangle$ поставлено в соответствие комплексное число $(|\varphi\rangle, |\Psi\rangle)$, обозначаемое кратко $\langle\varphi|\Psi\rangle$ и называемое их скалярным произведением, так что выполнены постулаты:

1. $\langle\varphi|\Psi\rangle = (\langle\Psi|\varphi\rangle)^*$;

2. $(|\varphi\rangle, a|\Psi_1\rangle + b|\Psi_2\rangle) = a\langle\varphi|\Psi_1\rangle + b\langle\varphi|\Psi_2\rangle$ для любых $a, b \in \mathbb{C}$;

3. $\langle\Psi|\Psi\rangle$ вещественно $\langle\Psi|\Psi\rangle \geq 0$, причем $\langle\Psi|\Psi\rangle = 0\rangle \Leftrightarrow |\Psi\rangle = 0$ (нулевой элемент пространства).

Из постулатов 1 и 2 следует, что скалярное произведение линейно по второму аргументу и антилинейно по первому, т.е.

$$(a|\varphi_1\rangle + b|\varphi_2, |\Psi\rangle) = a^*\langle\Psi\rangle + b^*\langle\Psi\rangle, \quad \forall\ a, b \in C.$$

---

[2] Здесь было упоминание скобок Дирака.

Задание (вместо определения). Найти математический и топологический объект и геометрическую фигуру, удобную для изображения и записи двух комплексных чисел α и β, принадлежащих двумерному гильбертову пространству (**спиновому пространству**) $H = C^2$, сумма квадратов модулей которых равна единице $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Сфера Блоха

На сфере Блоха кубит $|\Psi\rangle$ представлен как единичный вектор, лежащий на двумерной сфере S^2 , θ- полярный угол , φ- азимутальный угол.

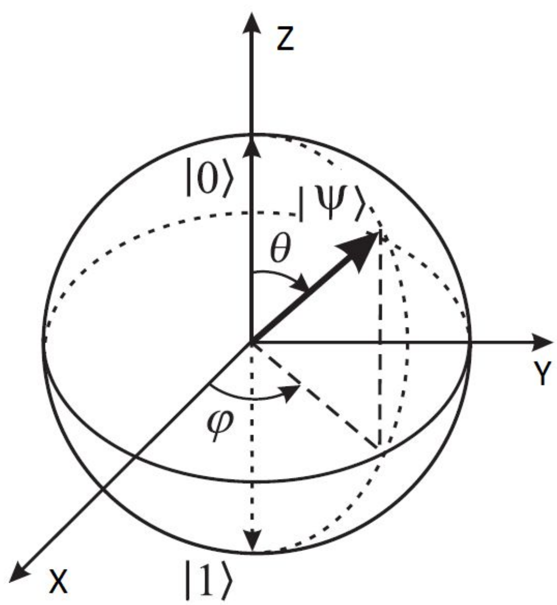

Рис.1 Представление кубита при помощи сферы Блоха

Итак, мы начинаем реализацию проекта «it from qubit» с упоминания тезиса сэра Майкла Берри: «На классические кости всегда можно нарастить мясо квантовой теории».

В классической механике сумма кинетической энергии $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$, $\vec{p} = m\vec{v}$ и потенциальной энергии V=V($\vec{r}$) для консервативной системы равна общей энергии

$$E = \frac{p^2}{2m} + V\,.$$

Подставляя дифференциальные операторы для полной энергии и момента

$$E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \text{ и } \vec{p} = -i\hbar\nabla$$

в уравнение общей энергии, записанное выше, получаем уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi,$$

дающее квантово-механическое описание электрона.

Уравнение Шредингера[3] объясняет все квантовые явления за исключением тех, которые связаны с магнетизмом и специальной теорией относительности.

Волновая функция Ψ комплекснозначная, $\Psi(\vec{r}, t) \in C$.

Квадрат модуля $|\Psi|^2$, проинтегрированный по области пространства, дает вероятность нахождения электрона в этой области.[4]

Эксперимент Штерна и Герлаха 1922 года показал, что пучок атомов серебра в сильном магнитном поле (нормальный эффект Зеемана) расщепляется на два. Два голландских аспиранта Пауля Эренфеста Уленбек и Гаудсмит в 1925 году высказали гипотезу[5] о вращающемся электроне для объяснения эксперимента Штерна и Герлаха, из которой следовало, что атомы серебра и электрон обладают внутренним угловым моментом – спином. Спин электрона, взаимодействуя с магнитным полем, располагается «вверх» ↑ или «вниз» ↓ в зависимости от того, параллелен или нет спин вертикальному магнитному полю. Этим объясняется поляризация атомов серебра только в двух направлениях. Концепция спина позволила физикам обосновать эффект Зеемана, но также создала много новых вопросов.

В 1913 году Эли Картан, занимаясь классификацией простых алгебр Ли, открыл новое представление ортогональной алгебры Ли A_1. Сначала он не дал специального названия этому представлению, и только много позже

---

[3] Уравнение Шредингера предполагает наличие корпускулярно-волнового дуализма.

[4] Вероятностная интерпретация квантовой механики была введена Максом Борном в 1926 году.

[5] Ранее высказанную Кронигом, но забракованную Паули.

(1938), в соответствии с запросами квантовой механики[6], он определил действие этого представления на новые объекты – спино́ры, которые описывают элементы группы вращений трехмерного пространства.

Спиноры нашли широкое применение в квантовой механике, когда стало ясно, что электрон и другие частицы (фермионы, протоны, нейтроны и мюоны обладают присущим только им внутренним угловым моментом (спином). Вольфганг Паули в 1927 году формализовал в рамках нерелятивистской квантовой механики вращающегося электрона связь магнитного углового момента электрона со спинором Картана в виде двумерного комплексного вектора-столбца (*спинора Паули*), а также ввел **спиновые матрицы Паули** (эрмитовы матрицы с нулевым следом над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$)

$$\sigma_x = (0\ 1\ 1\ 0\,),\quad \sigma_y = (0\ -i\ i\ 0\,),\quad \sigma_z = (1\ 0\ 0\ -1\,).$$

Пространство состояний простейших, существенно нетривиальных квантовых систем, представляют собой унитарное пространство размерности два. В квантовой информатике в этом пространстве определяется основной объект, который по аналогии с классической теорией информации называется **кубитом.**

Фундаментальным свойством материи является квантовый угловой момент количества движения частицы (электрона, протона, нейтрона и т.д.). Самым простым является рассмотрение идеализированной модели в виде одного электрона без учета его пространственного (орбитального) движения, а только с учетом «спиновой степени свободы», так что его вектор состояния принадлежит $H = C^2$. Термин «спин» применяется для обозначения вращения механического объекта относительно некоторой оси.

В квантовой механике с термином спин связываются двухуровневые квантовые системы и спиновое пространство $H = C^2$. Таким образом, **кубит** принадлежит спиновому пространству $H = C^2$ и представляет собой **спинор**

[6] Такие новые величины, как Ψr,t=1 2 , 1,2∈C,

с числом компонент равным двум или четырем, причем закон преобразования отличен от векторного или тензорного, доставляли много беспокойства физикам. Пауль Эренфест назвал эти величины *спи́норами.*

ранга один, который в вычислительном (стандартном) базисе (базисе Дирака) записывается как $|\Psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle=\alpha\,(1\ 0\ )+\ \beta$
$(0\ 1\ ) = (\alpha\ \beta\ ) \in H$, где α, $\beta\in\ C$ и удовлетворяют условию нормировки

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Коспинор ранга один принадлежит сопряженному (дуальному) спиновому пространству $\mathcal{H}=\tilde{C}^2$ и записывается в виде бра-вектора (строки) Дирака в виде

$\langle\, \Psi^*| = (\alpha^*\beta^*) \in \tilde{C}^2.$

Кубит является **единичным кватернионом**. Применительно к единичному кватерниону 1-е расслоение Хопфа осуществляет проектирование гомологической 3-сферы (S^3 вложена в R^4) на 2-сферу (S^2 вложена в R^3). 4-мерные и 3-мерные пространства связаны посредством единичной окружности S^1 , которая представляет собой расслоение пучка, состоящего из глобальной, геометрической и динамической фаз (различные определения фазы Берри (1984)).

1-е расслоение Хопфа для кубита

$$S^3\ S^1\rightarrow\ S^2$$

Четвертое измерение «не видно» непосредственно в 3-мерном пространстве, и мы можем воспринимать только «тени», которые и описывают собственный спин фундаментальных частиц.

От гомологической трехмерной сферы в физике остается сфера Блоха (сфера Пуанкаре) и сфера Римана – база расслоения Хопфа.