«Дайте мне точку опоры ...»

Архимед из Сиракуз

Единичные кватернионы (версоры[1]) и сфера Блоха

1. Введение

Кватернион $\overline{q}=x-yi-zj-wk$ называется **сопряженным** с кватернионом ***q*** ¿$x+yi+zj+wk$.Сумма квадратов $x^2+y^2+z^2+w^2$ коэффициентов кватерниона ***q*** (вещественное и положительное число) называется модулем или **нормой кватерниона** и обозначается N(***q***)=| ***q*** | $, q\cdot\overline{q}=x^2+y^2+z^2+w^2=$¿ |***q***| $, т.е.$ *произведение кватерниона* q на сопряженный ему кватернион равно норме кватерниона ***q***. Эта величина совпадает с нормой ***q*** как вектора из R^4. Кватернионы, норма которых равна единице, называются **единичными кватернионами.** Любой ненулевой кватернион обратим: $q^{-1}=$¿ $|q|^{-2}\overline{q}$; поэтому $\mathscr{H}$ является **телом**. Для любых кватернионов ***p*** и ***q*** выполнены равенства $\overline{pq}=\overline{q}\,\overline{p}$ и |***pq***|=|***p***||***q***|. Поскольку едининые кватернионы *образуют* трехмерню сферу $S^3\subset R^4$,мы получаем утверждение следующей теоремы:

Теорема (групповая структура трехмерной сферы). *Трехмерная сфера* S^3 *является некоммутативной группой с центром* $\{\pm 1\}$. *Левое и правое умножение задают действие* S^3 *на себя изометриями, сохраняющими ориентацию. Сопряжение с помощью элемента группы* S^3 *также является изометрией, сохраняющей ориентацию и, кроме того, переводящей в себя каждую двумерную сферу с центром в точке 1. Факторпространство* $S^3/\{\pm 1\}$ *изоморфно группе SO(3) изометрий сферы* S^2*, сохраняющих ориентацию.*

Доказательство. Расстояние между двумя точками на сфере S^3полностью определяется нормой разности между ними. Поскольку левое и правое умнжение на единичный кватернион сохраняет норму, оба отображения являются изометриями. Так как сфера S^3 связна, то по непрерывности они сохраняют и ориентацию.

1 Термин **версор** предложил Гамильтон в 1843 году.

Сопряжение также является изометрией; оставляя на месте точку 1, оно должно сохранять и множество точек, равноудаленных от 1, т.е. сопряжение сохраняет двумерные сферы.

Действие S^3 на этих сферах сопряжениями определяет сюрьективный гомоморфизм $\rho: S^3 \to SO(3)$, причем его ядро лежит в центре S^3.■

Единичные кватернионы образуют группу изоморфную *SU(2)* и вследствие этого являются идеальной математической структурой для представления (чистых) спин- ½ квантовых состояний, или **кубитов**.

Как и окружность, трехмерная сфера S^3является топологической группой. Проще всего это можно увидеть с помощью **кватернионов**, являющихся расширением комплексных чисел.

Пространство $\mathscr{H}$ кватернионов – это просто R^4с некоторым некоммутативным умножением $H \times H \to H$ *.Это отображение билинейно над*R, так что его достаточно определить в базисе пространства $\mathscr{H}$.

Но если единичный кватернион ***q*** по существу представляет собой точку на 3-сфере, кубит ψ часто рассматривается как точка на 2-сфере (сфере Блоха).

Такое редуцирование размерности становится возможным благодаря игнорированию глобальной фазы спинора ¿ $\chi\rangle$, т.е. при переходе к проективному гильбертовому пространству в котором ¿ $\chi\rangle$ и $\exp(i\alpha)\vee\chi\rangle$ соответствуют одному и тому же кубиту ψ (см. расслоение Хопфа). Хотя описание симметрий 3-сферы с помощью *SU(2)* более полное, чем описание кубита с помощью 2-сферы, до недавнего времени этому не уделялось должного внимания. Надо отметить, что глобальную фазу (фазу Берри), которая легко измеряется в лаборатории, надо учитывать с самого начала, а не отметать при рассмотрении спин- ½ квантовых состояний (двухуровневых квантовых систем), как это сделали Ландау и Лифшиц в своем курсе теоретической физики.

Единичный кватернион ***q***, представляющий чистое состояние двухуровневой квантовой системы, является одновременно и объектом геометрической алгебры – ***g кубитом*** , т.е. геометричесим кубитом.