Мнимость лежит в основе маломерной геометрической алгебры и алгебраической топологии.

Так, разрывая время, «Божественная комедия» неожиданно оказывается не позади, а впереди нам современной науки.

1922 17 марта, Сергиев Посад

Павел Флоренский «Мнимости в геометрии»

Расслоение $p:\ S^3\ S^1 \rightarrow\ S^2$ Хопфа[1] и кубит – двухуровневые квантовые системы

Расслоение Хопфа для комплексных чисел может быть также записано в виде

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2.$$

---

[1] В 1931 году немецкий математик Хайнц Хопф рассмотрел одну из основных конструкций маломерной алгебраической топологии – **расслоение Хопфа**. В этой статье Хопф фактически доказал что третья гомотопическая группа 3(S2) двумерной сферы нетривиальна (содержит элемент ∞). Совместно с Павлом Сергеевичем Александровым Хопф написали и опубликовал первый том учебника по алгебраической топологии, который до сих пор не переведен на русский язык.
Гомотопические группы в 1931 году были неизвестны (определены только в 1932 году Эдуардом Чехом на международном конгрессе в Цюрихе). Примечательно, что П.С. Александров и Хопф убеждали Э. Чеха не использовать их при рассмотрении расслоения Хопфа. Александров аргументировал это тем, что эта группа абелева, а Хопф считал что не существует алгоритма типа цепей, позволяющего их вычислять. Только в 1936 году Витольд Гуревич вновь открыл гомотопические группы и доказал ряд теорем.
Статья Хопфа состоит из двух частей: первая часть содержит определение **инварианта Хопфа** (современное название) и доказательство его гомотопной инвариантности; вторая часть содержит пример отображения гомологической трехмерной сферы S3 в двумерную сферу S2 которое имеет инвариант Хопфа равный 1 и поэтому является бесконечным элементом группы 3(S2). Это и есть то, что теперь называется расслоением Хопфа; прообразами точек двумерной сферы S2 являются большие окружности S3. Рассматривая S3 как единичную сферу z12+ z22=1 в C2 эти большие окружности представляют собой пересечения S3 с различными комплесными прямыми, проходящими через начало координат.
Хопф знал этот пример из неевклидовой геометрии, но его несколько лет интересовал вопрос: «существенно» ли это отображение, т.е. не гомотопно ли оно 0. Во время прогулки по набережной Шпрее в Берлине в 1927 году Хопф понял, что «Любые две из этих окружностей сцеплены в S3", т.е. представляют собой окружности Вилларсо. Всё остальное относится к истории математики.

Читается: расслоение трехмерной сферы S^3 над двумерной сферой S^2 с слоем окружность S^1.

По теореме Адамса существует всего 4 расслоения: над полем вещественных чисел $S^0 \hookrightarrow S^1 \to S^1$, над полем комплексных чисел $S^1 \hookrightarrow S^3 \to S^2$, над кватернионами $S^3 \hookrightarrow S^7 \to S^4$ и над октанионами $S^7 \hookrightarrow S^{15} \to S^8$.

Аналогично стереографической проекции, существует соответствие между окружностями в трехмерном пространстве R_3 и окружностями на трехмерной сфере S^3 (границе четырехмерного шара).

Фактически идея расслоения, высказанная Хопфом, позволила определить третью группу гомотопии двумерной сферы и в частности показать, что эта группа нетривиальна с помощью соответствующего отображения трехмерной сферы на двумерную и связанного с этим расслоением трехмерной сферы.

Вообще расслоение Хопфа возникает сразу при рассмотрении векторов состояния и состояний в квантовой механике и соответствующего базового пространства – двумерной сферы S^2, так называемой «сферы Блоха». Не рассматривая саму природу базового пространства расслоения, как отмечает Хопф, само расслоение представляет собой параллели Клиффорда (Clifford parallels), открытые им в 1873 году. Параллели Клиффорда рассматриваются в контексте трехмерного вещественного проективного пространства и являются эллиптической версией неевклидовой геометрии.

Расслоение Хопфа естественным образом связано с двухуровневыми квантовыми системами, которые могут быть описаны с помощью двумерного комплексного гильбертова пространства. Двумерное комплексное гильбертово пространство C^2 обладает стандартным эрмитовым скалярным произведением (z,w) = $\bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2 = z^\dagger w$. Состояния двухуровневой квантовой системы задаются матрицами плотности, т.е. эрмитово положительно определенными матрицами 2×2 со следом 1;