

Вычисление модулярных функций

Студент 6 курса А.М. Ватузов
Научный руководитель к. ф.-м. н. Н.М. Адрианов

МГУ им. М.В. Ломоносова
Кафедра теоретической информатики

Введение

Детский рисунок – двукрашенный (связный) граф Γ , вложенный в компактную ориентированную поверхность X таким образом, что дополнение $\Gamma \setminus X$ гомеоморфно несвязному объединению открытых дисков. Пусть $\mathcal{X}$ – полная гладкая неприводимая комплексная кривая. Функция β на $\mathcal{X}$ – *функция Белого*, если β не имеет критических значений, кроме $0, 1, \infty$. Тогда пара $(\mathcal{X}, \beta)$ – *пара Белого*. Согласно теореме Белого, кривая определена над $\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда на ней есть функция Белого.

Постановка задачи

Из других работ известно, что находить функцию Белого можно по приближённый-истинному виду рисунка. В свою очередь, для нахождения такого вида рисунка можно использовать поиск мероморфной функции $f(z)$, инвариантной относительно группы преобразований Γ . По рисунку можно легко найти фундаментальную область и набор её склеек. Для рисунка

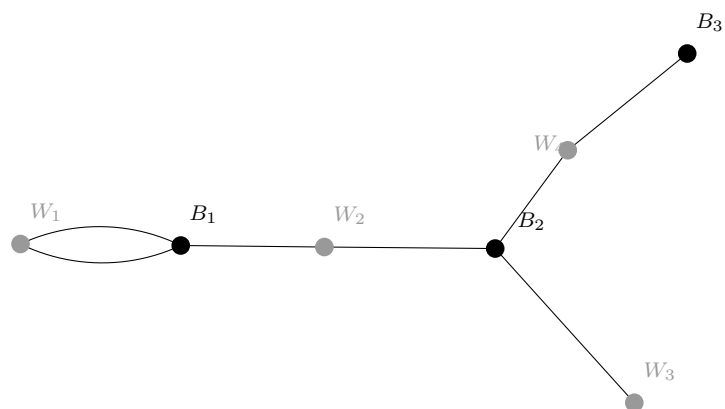


Рис. 1: Детский рисунок с группой вращений рёбер $\text{AGL}_1(7)$

получаем фундаментальную область

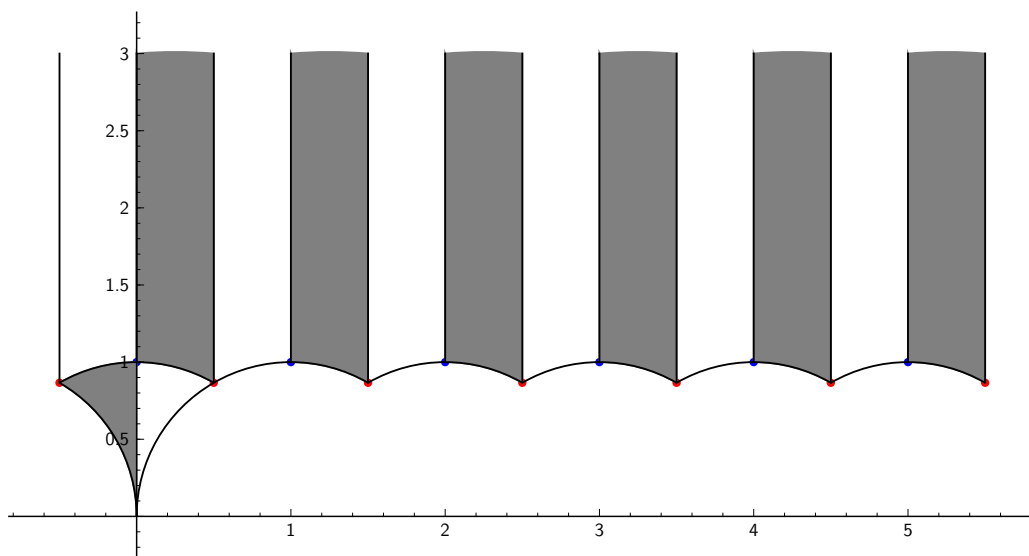


Рис. 2: Фундаментальная область группы Γ для детского рисунка

Поиск мероморфной функции

Выберем сетку для фундаментальной области, и найдём значения функции в узлах сетки. А именно, составим разностные уравнения на значения функции. Прямоугольная сетка не подходит, поскольку на ней нельзя передать информацию о поведении функции при склейке фундаментальной области.

Мы рассматриваем модель Пуанкаре плоскости Лобачевского, и фундаментальная область представляет из себя набор треугольников Лобачевского. Напомню, что расстояние в этой модели определяется как $\text{dist}(z_1, z_2) = \text{arch}(1 + \frac{(z_1 - z_2)^2}{2\text{Im}z_1\text{Im}z_2})$

Выберем сетку таким образом, чтобы соприкасающиеся границы треугольников разбивались на одинаковые отрезки. Тогда можно будет отождествить узлы, переходящие друг в друга под действием группы преобразований. Нам достаточно задать разбиение любого треугольника фундаментальной группы. По метрике, одна из вершин треугольника лежит на бесконечном расстоянии от других (т. е. на оси OX полуплоскости либо на бесконечности). Отложим вдоль этих бесконечных лучей равные отрезки, получим набор пар точек. Отрезок между каждой такой парой точек разобьём на равные части. Таким образом получим разбиение любого треугольника фундаментальной области.

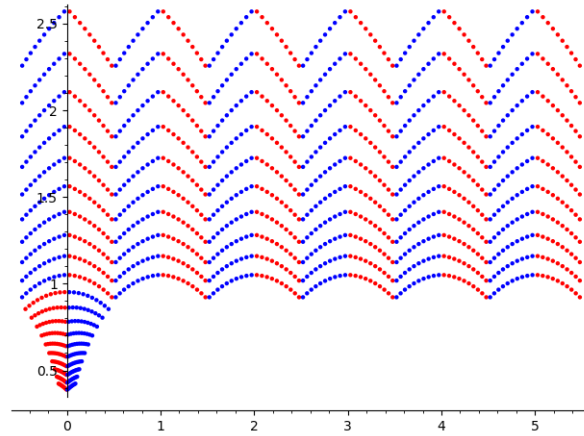


Рис. 3: Сетка на фундаментальной области рисунка

Если воспользуемся приёмом с преобразованием аргумента $e^{2i\pi z/6}$, получим иную сетку, что, вероятно, должно влиять на сходимость.

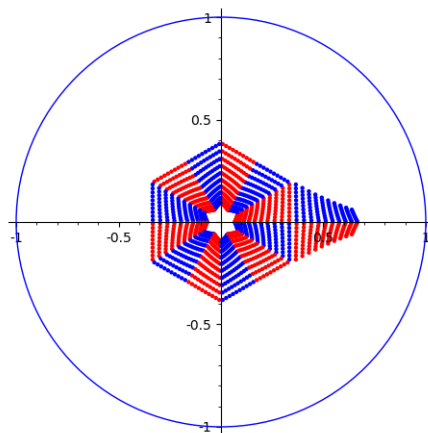


Рис. 4: Преобразованная сетка на фундаментальной области рисунка

Условие мероморфности функции потенциально даёт уравнение на каждый внутренний узел этой сетки (тот что не уходит на бесконечность в треугольнике). На границе сетки можно объявить все значения равными (например, равной константе – положению центра соответствующей грани детского рисунка). Система линейных уравнений получается достаточно объёмной, но разреженной и поэтому достаточно быстро решаемой.

Заключение

Кратко опишем техническую реализацию данного подхода. Для построения систем используется `sagemath`, для работы с плоскостью Лобачевского – модификация библиотеки от Hartmut Monien. Проблема библиотеки в том, что фундаментальных областей много разных, нам нужна наиболее удобная для вычислений. Подобный метод упоминается самим Monien.