Математические модели оценки недвижимости в нечетко структурированной среде на примере стоимости квартиры.

Б. Б. МАКАТОВА, Л. П. ДМИТРИЕВА
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: batima.mak@gmail.com

Ключевые слова: рыночная стоимость, оценка недвижимости, экономико-математические методы оценки, алгоритм прогнозирования, теория нечетких множеств, нечеткая логика, нечеткие системы.

Аннотация

Рассматривается задача рыночной оценки недвижимости. Описываются алгоритмы исследования функции стоимости недвижимости в зависимости от ее характеристик с помощью методов классической и неклассической математики.

1 Введение.

Рынок недвижимости является ключевым элементом экономики, т. к. на долю недвижимости приходится более 50% мирового богатства. Его роль обусловлена потребностью общества в жилых и нежилых помещениях, долей сектора в ВВП стран, мультипликативным эффектом воздействия на смежные отрасли и т. д. В связи с этим актуальной представляется тема оценки недвижимости, а именно построение экономико-математических моделей рыночной оценки недвижимости и внедрение таких моделей в компьютерные программы.

Рыночная стоимость объекта может быть определена либо с помощью традиционных методов *индивидуальной* оценки, либо с помощью методов *массовой* оценки. Все методы представляют собой процедуру построения некоторой математической модели, устанавливающей связь между наиболее вероятной ценой и ценообразующими факторами, под которыми следует понимать характеристики объекта оценки как товара, которые, с точки зрения рынка, влияют на его стоимость. При этом, в процессе индивидуальной оценки объекта учитывается полный набор объективно и субъективно измеряемых параметров, влияющих на стоимость, а в процессе массовой оценки учитываются лишь параметры, которые могут быть объективно измерены, и совпадающие для всех объектов оценки.

В результате массовой оценки объекты, имеющие одинаковые основные характеристики, будут оценены одинаково, вне зависимости от своих

индивидуальных особенностей. Такая оценка рыночной стоимости определяет однородную группу объектов, сходных по определенным параметрам. В зависимости от набора используемых при оценке параметров, меняется количество объектов в группе. Сокращение учитываемых ценообразующих факторов приводит также к огрублению оценки.

Существуют 3 подхода к индивидуальной оценке недвижимости: доходный, затратный и сравнительный.

Затратный подход основан на определении затрат, необходимых для восстановления либо замещения объекта оценки, с учетом его износа.

Доходный подход основан на определении ожидаемых доходов от объекта оценки.

Сравнительный подход основан на сравнении объекта оценки с аналогичными объектами, в отношении которых имеется информация о ценах сделок с ними.

Результат, наиболее близкий к понятию вероятной рыночной цены, получают с помощью методов сравнительного подхода. В западных странах такой подход к оценке применяется в 90% случаев.

Оценка рыночной стоимости на основе затратного или доходного подхода нуждается в проверке сопоставлением с оценкой, полученной с помощью какого-либо другого подхода. Тогда для повышения эффективности и достоверности оценки рекомендуется применять несколько методов, а потом согласовывать полученные результаты, применяя метод среднего взвешенного. Однако соблюдение этого требования стандартов оценки в полном объеме приводит к повышению трудоемкости оценочных работ. Избежать недостатков применения индивидуальной оценки помогает использование системы массовой оценки.

На данный момент наиболее распространенными статистическими методами массовой оценки являются метод корреляционно-регрессионного анализа и метод декомпозиционного (или дискретного) анализа.

В данной работе будет рассматриваться применение теории нечетких множеств в рыночной оценке недвижимости при помощи сравнительного подхода. Объектом оценки будет служить квартира.

Актуальность работы определяется тем, что на результат оценки квартир, помимо количественных характеристик, существенное влияние оказывает описание качественных признаков, таких как район, тип дома, тип стен, состояние квартиры и т.д. Теория нечетких множеств позволяет быстро перейти от словесного описания объекта к численной оценке его состояния, и сформулировать простые алгоритмы решения задач, моделируя таким образом человеческие размышления.

Теория нечетких множеств и нечеткая логика являются обобщениями классической теории множеств и классической формальной логики. Данные понятия были впервые предложены ученым Лотфи Заде (Lotfi Zadeh) в 1965 г. в статье «Fuzzy Sets» в журнале «Information and

Control».

Предпосылкой к развитию новой науки послужила потребность в формализации некоторой неопределенности, возникающей при построении математических моделей реального мира. Нечеткая логика позволяет дать строгое математическое описание в действительности нечетких утверждений, реализуя таким образом попытку преодолеть лингвистический барьер между человеком, суждения и оценки которого являются приближенными и нечеткими, и машинами, которые могут выполнять только четкие инструкции.

2 Общие понятия из теории нечетких множеств.

Ознакомимся с основами теории нечетких множеств, используя формулировки из [3, 2, 1].

Определение 2.1 *Пусть U — некоторое множество элементов u, и $\mu_A : U \longrightarrow [0;1]$.* ***Нечетким подмножеством*** *A в U называется множество вида $\{ (u,\ \mu_A(u)) : u \in U \}$; при этом значение $\mu_A(u)$ называется* ***степенью принадлежности*** *u к A, а множество U называется* ***универсальным множеством****.*

Чем выше степень принадлежности, тем в большей мере элемент универсального множества соответствует свойствам нечеткого множества.

Определение 2.2 ***Функцией принадлежности*** *называется функция, которая позволяет вычислить степень принадлежности произвольного элемента универсального множества к нечеткому множеству.*

Определение 2.3 *Пусть M — множество принадлежностей, $\mu_R : U \longrightarrow M$. Тогда нечеткое множество R такое, что $\forall (x,y) \in U_1 \times U_2\ \mu_R(x,y) \in M$ называется* ***нечетким бинарным отношением*** *R в $U_1 \times U_2$.*

Нечеткое отношение R можно задать матрицей $R = \{ \mu_{ij} \}$, где $\mu_{ij} = \mu_R(x_i, y_j)$, если множества U_1 и U_2 конечны.

Определение 2.4 ***Лингвистическая пременная*** *описывается пятеркой*

$$\langle A,\ T(A),\ U,\ V,\ M \rangle,$$

где A — имя переменной;

$T(A)$ — терм-множество переменной A, т.е. множество лингвистических значений переменной A, каждый элемент которого задается нечетким подмножеством универсального множества U;

V — синтаксическое правило (часто в виде грамматики), порождающее название термов (элементов терм-множества);

M — семантическое правило, которое ставит в соответствие каждому элементу множества $T(A)$ нечеткое подмножество универсального множества U.

Пример 2.1 имя переменной: A = *«температура в комнате»;*

универсальное множество: $U = [12; 35]$;

терм-множество: $T(A)$ = *«холодно», «комфортно», «жарко» со следующими функциями принадлежностей*

$$\mu_1\ (u) = \frac{1}{1 + \left|\frac{u-12}{6}\right|^{12}},$$

$$\mu_2\ (u) = \frac{1}{1 + \left|\frac{u-20}{3}\right|^{8}},$$

$$\mu_3\ (u) = \frac{1}{1 + \left|\frac{u-33}{8}\right|^{12}}$$

соответственно, $u \in U$;

синтаксическое правило: *V порождает новые термы с использованием модификаторов «не», «очень» и «более-менее»;*

семантическое правило M: *(таблица 1)*

Модификатор	Функция принадлежности
не t	$1 - \mu_t(u)$
очень t	$(\mu_t(u))^2$
более-менее t	$\sqrt{\mu_t(u)}$

Таблица 1:

График функций принадлежности термов «холодно», «не очень холодно», «комфортно», «более-менее комфортно», «жарко» и «очень жарко» лингвистической переменной «температура в комнате» показаны на рис. 1

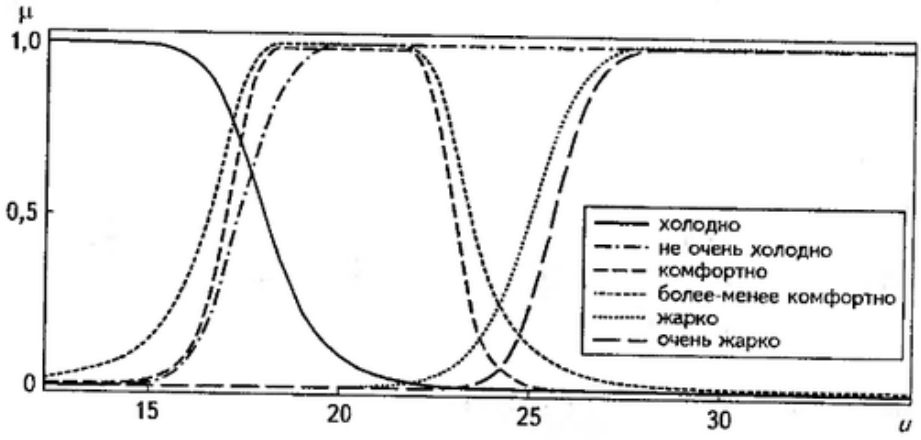

Рис. 1:

Определение 2.5 ***База данных*** *(БД) — совокупность постоянно хранимых данных (записей), которые являются структурированными, однородными и организованными таким образом, чтобы удовлетворять таким требованиям пользователей, как хранение, изменение, обработка данных.*

В нечеткой логике в качестве операции конъюнкции используют треугольные нормы (t-нормы), а в качестве операции дизъюнкции — треугольные конормы (s-нормы).

Определение 2.6 ***Треугольной нормой*** *называется действительная двухместная функция* $T : [0;1] \times [0;1] \longrightarrow [0;1]$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1. $T(0,0) = 0, T(\mu_A, 1) = T(1, \mu_A) = \mu_A$ *(ограниченность);*
2. $T(\mu_A, \mu_B) \leqslant T(\mu_C, \mu_D)$, *если* $\mu_A \leqslant \mu_C$ *и* $\mu_B \leqslant \mu_D$ *(монотонность);*
3. $T(\mu_A, \mu_B) = T(\mu_B, \mu_A)$ *(коммутативность);*

4. $T(\mu_A, T(\mu_B, \mu_C)) = T(T(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$ *(ассоциативность).*

Определение конормы отличается лишь видом свойства ограниченности: $S(\mu_A, 0) = S(0, \mu_A) = \mu_A$.

Пример 2.2 *Простейшие примеры t-норм:*

1. $\min(\mu_A, \mu_B)$;
2. $T_p(\mu_A, \mu_B) = \mu_A \times \mu_B$;
3. $T_m(\mu_A, \mu_B) = \max(0, \mu_A + \mu_B - 1)$;
4. $$T_\omega(\mu_A, \mu_B) = \begin{cases} \mu_A, & \text{если } \mu_B = 1; \\ \mu_A, & \text{если } \mu_A = 1; \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Определение 2.7 *Дефаззификация — преобразование нечеткого множества в четкое.*

Простейшим способом дефаззификации является выбор четкого числа с максимальной степенью принадлежности. Однако, он пригоден лишь для случая с одноэкстремальной функцией принадлежности, т.е. когда нечеткое множество имеет только один элемент, степень принадлежности которого равна единице. Для многоэкстремальных функций принадлежности применяют ряд других методов: центр тяжести, медиана, наибольший из максимумов, наименьший из максимумов, центр максимумов.

Определение 2.8 *Нечеткий логический вывод — это аппроксимация зависимости «входы-выход» на основе лингвистических высказываний «если-то» и логических операций над нечеткими множествами.*

Определение 2.9 *Нечеткая база знаний — совокупность нечетких правил «если-то», задающих взаимосвязь между входами и выходами исследуемого объекта.*

Формат нечетких правил такой:

ЕСЛИ <посылка правила>, ТО <заключение правила>.

Меру уверенности эксперта в адекватности правил учитывают через весовые коэффициенты.

Нечеткую базу знаний, связывающую входы $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с выходом y, представим следующим образом:

$(x_1 = \widetilde{a_{1j}}\ \Theta_j\ x_2 = \widetilde{a_{2j}}\ \Theta_j\ \ldots\ \Theta_j\ x_n = \widetilde{a_{nj}}$ с весом $w_j) \Rightarrow y = \widetilde{d_j}, j = \overline{1, m}$,

где $\widetilde{a_{ij}}$ — нечеткий терм, которым оценивается переменная x_i в j-м правиле, $j = \overline{1,m}$; $w_j \in [0,1]$ — весовой коэффициент j-го правила; $\widetilde{d}_j$ — заключение j-го правила; m — количество правил в базе знаний; Θ_j — логическая операция И или ИЛИ; $\Rightarrow$ — нечеткая импликация.

3 Алгоритм Мамдани.

В 1975 году английский математик Э. Мамдани (Ebrahim Mamdani) разработал алгоритм, основанный на нечетком логическом выводе, который был предложен в качестве метода для управления паровым двигателем. Этот алгоритм в настоящее время получил наибольшее практическое применение в задачах нечеткого моделирования.

Приведем описание алгоритма Мамдани из [1].

Нечеткий вывод Мамдани выполняется по такой базе знаний:

$$(x_1 = \widetilde{a_{1j}}\ \Theta_j\ x_2 = \widetilde{a_{2j}}\ \Theta_j\ \ldots\ \Theta_j\ x_n = \widetilde{a_{nj}}\ with\ weight\ w_j) \Rightarrow y = \widetilde{d}_j, j = \overline{1,m},$$

в которой все значения входных и выходных переменных заданы нечеткими множествами.

Введем следующие обозначения:

$\mu_j(x_i)$ — функция принадлежности входа $x_i \in \left[\underline{x_i}, \overline{x_i}\right]$ нечеткому терму $\widetilde{a_{ij}}$, т.е. $\widetilde{a_{ij}} = \int\limits_{x_i \in \left[\underline{x_i}, \overline{x_i}\right]} \mu_j(x_i)/x_i$;

$\mu_{d_j}(y)$ — функция принадлежности выхода $y \in \left[\underline{y}, \overline{y}\right]$ нечеткому терму $\widetilde{d}_j$, т.е. $\widetilde{d}_j = \int\limits_{y \in \left[\underline{y}, \overline{y}\right]} \mu_{d_j}(y)/y$.

Степень выполнения посылки j–го правила для входного вектора $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ рассчитывается так:

$$\mu_j(X^*) = w_j\left(\mu_j(x_1^*)\ \chi_j\ \mu_j(x_2^*)\ \chi_j\ \ldots\ \chi_j\ \mu_j(x_n^*)\right),\ j = \overline{1,m},$$

где χ_j обозначает t-норму, если в j-м правиле базы знаний используется логическая операция И (Θ_j =И), и соответствует s-норме при Θ_j =ИЛИ. В нечетком выводе Мамдани t-нормы обычно реализуются операцией минимума, а s-нормы — операцией максимума.

Результат нечеткого вывода можно представить в виде:

$$\widetilde{y^*} = \left(\frac{\mu_1(X^*)}{\widetilde{d_1}}, \frac{\mu_2(X^*)}{\widetilde{d_2}}, \cdots, \frac{\mu_m(X^*)}{\widetilde{d_m}}\right).$$

Носителем этого нечеткого множества является множество нечетких термов $\widetilde{d_1}, \widetilde{d_2}, \ldots, \widetilde{d_m}$. Для перехода к нечеткому множеству на носителе $|\underline{y}, \overline{y}|$ выполним операции импликации и агрегирования.

В результате логического вывода по j-му правилу базы знаний получаем такое нечеткое значение выходной переменной y:

$$\widetilde{d_j^*} = \int\limits_{y \in [\underline{y}, \overline{y}]} \min(\mu_j(X^*), \mu_{d_j}(y))/y.$$

Результат логического вывода по всей базе знаний находят агрегированием нечетких множеств:

$$\widetilde{y^*} = \max(\widetilde{d_1^*}, \widetilde{d_2^*}, \ldots, \widetilde{d_m^*}).$$

Четкое значение выхода y, соответствующего входному вектору X^*, определяется через дефаззификацию нечеткого множества $\widetilde{y}$. Наиболее часто применяется дефаззификация по методу центра тяжести.

Этот алгоритм, как и многие другие алгоритмы нечеткого вывода, уже реализован в таких продуктах, как Fuzzy Logic Toolbox (расширение для MatLab), fuzzyTECH и многих других.

4 Адаптация алгоритма Мамдани для нечеткого отношения сходства.

Постановка задачи. Имеется база данных A с записями $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$, содержащая названия (имена) объектов и значения признаков - k штук количественных и качественных характеристик и цены $z_i, i = 1, \ldots, m$. Также известны $n (n \leqslant k)$ штук характеристик объекта B. Требуется найти цену z объекта B.

Вычислим степени соответствия каждой записи A_i запросу B по каждой из n характеристик, $i = \overline{1, m}$. Для этого зададим nm нечетких отношений сходства в виде матриц, на основе экспертных оценок.

R	a	b	c	d
a	1	r_{12}	r_{13}	0
b	r_{12}	1	r_{23}	r_{24}
c	r_{13}	r_{23}	1	r_{34}
d	0	r_{24}	r_{34}	1

Таблица 2: Вид матрицы нечеткого отношения сходства R (здесь a, b, c, d — все возможные упорядоченные значения характеристики объекта)

Будем использовать полученные значения нечеткого отношения сходства в качестве области значений функции принадлежности $\mu_j(x_i^*),\ j = \overline{1, m},\ i = \overline{1, n}$. Тогда в базе знаний нечеткого вывода возьмем x_i — переменная, соответствующая i-му признаку, $\widetilde{a_{ij}}$ — значение i-го признака в

j-той записи, y — искомая цена, $\widetilde{d_j}$ — нечеткий терм, соответствующий лингвистической переменной y для j-й записи, $i = \overline{1, n}, \Theta_j =$И.

Рассмотрим отдельно идею построения функции принадлежности для цены. Лингвистическая переменная «цена квартиры» задана на некотором универсальном множестве U. Терм-множество T =«очень низкая», «низкая», «средняя», «выше среднего», «высокая». Будем использовать прямые методы для построения функции принадлежности для каждого терма из терм-множества. Экспертная оценка позволит установить ядро и носитель каждого терма.

Экспертные оценки вносят в модель некоторую нечеткость. В классическом алгоритме Мамдани они используются при построении функций принадлежности для каждой характеристики и для цены, а также при формулировке правил для базы знаний. В измененном же алгоритме правила формулируются строго исходя из имеющейся в базе данных информации.

5 Заключение.

В данной работе сформулированы главные принципы рыночной оценки недвижимости и рассмотрен неклассический алгоритм оценки, основанный на методах нечеткой логики. В дальнейшем планируется оценить погрешность результатов предложенного алгоритма, проверив его работу на доступной базе данных, а также сравнить этот алгоритм с известными методами оценки.

В работе [4] уже приводилось сравнение регрессионной модели и модели нечеткой логики, основанной на классическом алгоритме Мамдани. В результате оценки нечеткая модель показала меньшую ошибку аппроксимации.

Так же стоит понимать, что при использовании нечеткой логики, не удается построить функцию зависимости стоимости от ценообразующих факторов, а получается лишь описать алгоритм нечеткого логического вывода, а значит, для каждого входного вектора алгоритм выполняется заново. Нечеткие системы очень чувствительны к выбору функций принадлежности, алгоритма логического вывода и процесса дефаззификации. Очень многое зависит от предварительной экспертной работы. Только опытным путем можно добиться улучшения прогнозирования исследуемой переменной с использованием нечеткой логики.

Список литературы

[1] Штовба С.Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. — Москва, Горячая линия – Телеком, 2007.

[2] Рыжов А.П. Элементы теории нечетких множеств и ее приложений. — Москва, 2003.

[3] Рыжов А.П. Модели поиска информации средствами теории нечетких множеств. — Москва, 2004.

[4] Ханагян А.Л. О математических моделях функции стоимости жилья (магистерская диссертация). — Барнаул, 2016.

[5] Ясницкий Л.Н., Ясницкий В.Л. Разработка и применение комплексных нейросетевых моделей массовой оценки и прогнозирования стоимости жилых объектов на примере рынков недвижимости Екатеринбурга и Перми. — 2017.

[6] Лейфер Л.А. Массовая и индивидуальная оценка. Точность методов и цена ошибок. — Москва, Вопросы оценки, 2011.

[7] Грибовский С.В., Федотова М.А., Стерник Г.М., Житков Д.Б. Экономико-математические модели оценки недвижимости. — Москва, Финансы и кредит, 2005.

[8] Кононюк А.Е. Дискретно-непрерывная математика. Книга 2 «Множества». Часть 2 «Нечеткие». — Киев, 2012.

[9] Алтунин А.Е., Семухин М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. Монография. — Тюмень, Издательство Тюменского государственного университета, 2000.

[10] Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. Принятие решений на основе нечетких моделей: примеры использования. — Рига, Рижский технический университет, 1990.

[11] Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. Перевод с французского В.Б. Кузьмина. Под редакцией С.И. Травкина. —Москва, Радио и связь, 1982.

[12] Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. — СПб, БХВ-Петербург, 2005.

[13] Масалович А. Нечеткие когнитивные схемы - новый инструмент для моделирования экономических, политических, социальных ситуаций.

[14] Ротштейн А.П., Штовба С.Д. Нечеткий многокритериальный анализ вариантов с применением парных сравнений. — Известия РАН, 2001.

[15] Грибовский С.В., Сивец С.А. Математические методы оценки стоимости недвижимого имущества. — Москва, Финансы и статистика, 2014.

[16] Дайтбегов Д.М. Компьютерные технологии анализа данных в эконометрике. — Москва, ИНФА-М, 2008.

[17] Сивец С.А. Статистические методы в оценке недвижимости и бизнеса. — Запорожье, ООО РИА «Просвіта, 2001.

[18] Стерник Г.М, Стерник С.Г. Анализ рынка недвижимости для профессионалов. — Москва, ЗАО «Издательство «Экономика», 2009.

[19] Черепанов Ф.М, Ясницкий Л.Н. Нейросетевой фильтр для исключения выбросов в статистической информации. — Москва, Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика., 2008.

[20] Лейфер Л.А. Точность результатов оценки и пределы ответственности оценщика. — Имущественные отношения в Российской Федерации. 2009.

[21] Баринов Н.П, Грибовский С.В., Зельдин М.А. Точность оценки и пределы ответственности оценщика. Встречные мысли. — Имущественные отношения в Российской Федерации. 2009.

[22] Международное руководство по оценке (МСО 2005).

[23] Заде Лофти. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — Москва, Мир, 1976.

[24] Беляев Л.С. Решение сложных оптимизационных задач в условиях неопределенности. — Новосибирск, Наука, 1987.